Desigualdade do valor médio

Lema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}^M$, contínua, diferenciável em $]a,b[$, então existe $t_0 \in]a,b[$ tal que:

$$\| f(b) - f(a) \| \leq (b-a) \| f'(t_0) \| .$$

Lembrar: $D \subset \mathbb{R}^N$ é convexo se dados $x, y \in D$ então

$$\{ tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1 \} \subset D$$

Por exemplo, dados $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\rho > 0$ $B_\rho(x_0)$, $B_\rho[x_0]$ são convexos.

Demonstração: $B_\rho(x_0)$ é convexa

Sejam $x, y \in B_\rho(x_0)$. Temos $|x - x_0| < \rho$ e $|y - x_0| < \rho$ e precisamos mostrar que

$$|tx + (1-t)y - x_0| < \rho, \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

De fato

$$|tx + (1-t)y - x_0| =$$

$$|tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0|$$

$$= |t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)|$$

$$\leq |t(x - x_0)| + |(1-t)(y - x_0)|$$

$$= t|x - x_0| + (1-t)|y - x_0|$$

$$< t\rho + (1-t)\rho = \rho$$

Teorema: Sejam $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto convexo e $f: D \to \mathbb{R}^M$ diferenciável em D. Suponha que existe $M \geq 0$:

$$\|f'(x)\| \leq M, \ \forall x \in D.$$

Então, dados $a, b \in D$, temos

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Dem. Fixamos $a, b \in D$ e tomamos $\gamma(t) = a + t(b-a)$, $0 \leq t \leq 1$. Por hipótese $\gamma(t) \in D$, $\forall t$, $0 \leq t \leq 1$ e portanto podemos considerar $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^M$,

$g(t) = f(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Note que g é contínua em $[0,1]$

pois é composta de funções contínuas. Note também que g é diferenciável em $]0,1[$ pela regra da cadeia, pois γ é diferenciável e f também.

Logo, pelo lema:

$$|g(1) - g(0)| \leq (1-0)\,\|g'(t_0)\|$$

para algum $0 < t_0 < 1$. Temos

$$g(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$$

$$g(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$$

Logo $|f(b) - f(a)| \leq \|g'(t_0)\|$

Temos $g = f \circ \gamma$ em $]0,1[$.

Logo $\underbrace{g'(t_0)}_{\in L(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)} = \underbrace{f'(\gamma(t_0))}_{\in L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)} \underbrace{\gamma'(t_0)}_{\in L(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)}$

e portanto

$$\|g'(t_0)\| \leq \|f'(\gamma(t_0))\| \, \|\gamma'(t_0)\|$$

Como $\gamma(t_0) \in D$ temos

$$\|g'(t_0)\| \leq M \|\gamma'(t_0)\|$$

e portanto

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|\gamma'(t_0)\|.$$

Temos $\gamma(t) \doteq a + t(b-a)$ e portanto $\gamma'(t)$ é a derivada da da transformação linear $t \longmapsto t(b-a)$ e $\therefore$

$$\|\gamma'(t)\| = |b-a|. \qquad \blacksquare$$

<u>Resultado</u> <u>de</u> <u>espaços</u> <u>métricos</u>

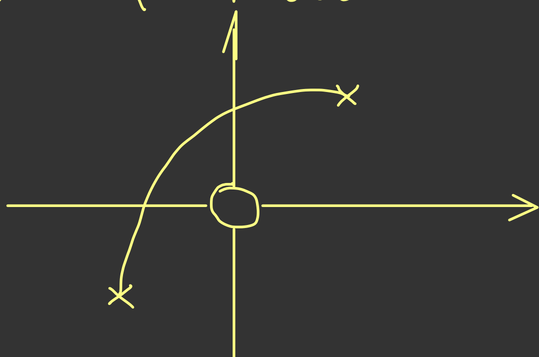
<u>Teorema</u>: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto em $\mathbb{R}^N$. São equivalentes:

(A) Ω é conexo

(B) Dados $x, y \in \Omega$ existe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ contínua, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

__Corolário:__ Ω aberto convexo $\Rightarrow$ Ω conexo.

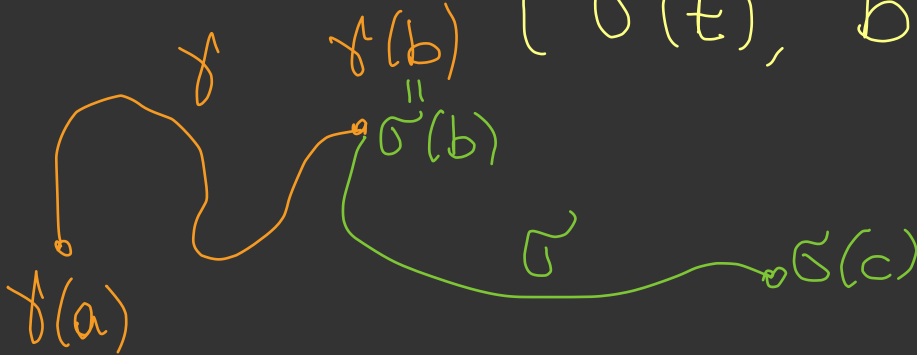
__Corolário:__ $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é conexo se $N \geq 2$ (mas não é convexo)



__Demonstração:__

(A) $\Rightarrow$ (B) Para esta demonstração vamos usar a seguinte notação: se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $\sigma : [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ são contínuas e se $\gamma(b) = \sigma(b)$ então $\gamma \vee \sigma : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ denota a função contínua

$$(\gamma \vee \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & a \leq t \leq b \\ \sigma(t), & b \leq t \leq c \end{cases}$$



Fixemos um ponto $x_0 \in \Omega$ e consideremos

$$U = \{ y \in \Omega : \exists \gamma : [a,b] \to \Omega, \; \gamma(a) = x_0, \gamma(b) = y \}$$

<u>Basta</u> <u>mostrar</u> <u>que</u> $U = \Omega$

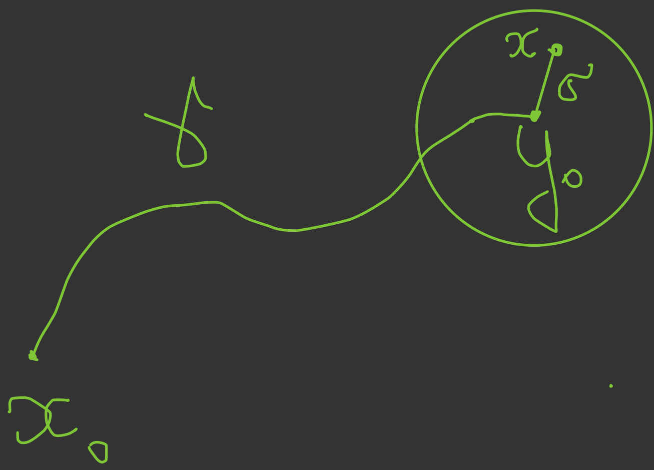
[como x_0 é arbitrário, dois pontos quaisquer de Ω podem ser ligados por uma curva contínua.]

Vamos mostrar que U e $\Omega \setminus U$ são abertos em Ω. Note que isto mostra nossa afirmação pois $x_0 \in U$ e portanto, como Ω é conexo, $\Omega \setminus U = \phi$.

- U é aberto em Ω.

Seja $y_0 \in U$. Seja $r > 0$ t.q. $B_r(y_0) \subset \Omega$. (usei que Ω é aberto em $\mathbb{R}^N$)

$\exists \gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua



$B_r(y_0)$ $\quad y_0 \in U$

$\gamma(a) = x_0$

$\gamma(b) = y_0$

Como $B_r(y_0)$ é convexa dado $x \in B_r(x_0)$ existe $\sigma : [b,c] \to B_r(x_0)$, $\sigma(b) = y_0$,
contínua

$\sigma(c) = x$. Logo $\tilde{\gamma} = \gamma \vee \sigma$

$\tilde{\gamma} : [a,c] \to \Omega$ é contínua e satisfaz $\tilde{\gamma}(a) = x_0$, $\tilde{\gamma}(c) = x$

Assim $x \in U$. Como x é

arbitrário em $B_r(y_0)$, temos $B_r(y_0) \subset U$. Conclusão:

<u>U é aberto em Ω</u>

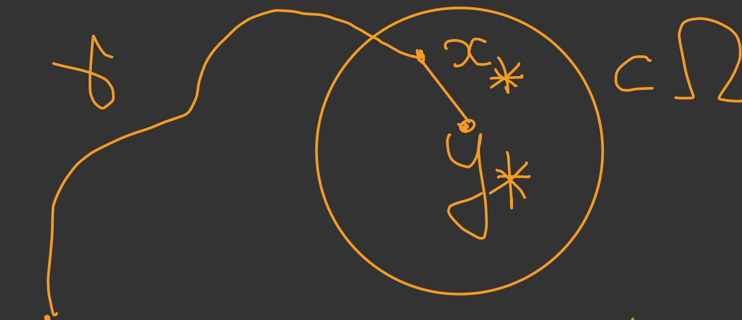
- $\Omega \setminus U$ é aberto em Ω.

Seja $y_* \in \Omega \setminus U$. Existe $\rho > 0$: $B_\rho(y_*) \subset \Omega$.

Afirmo que $B_\rho(y_*) \subset \Omega \setminus U$

Suponha que isto não valha, i.e., que exista $x_* \in B_\rho(y_*)$, $x_* \in U$

$\exists\ \gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua



$\gamma(a) = x_0$

$\gamma(b) = x_*$

Como $B_\rho(y_*)$ é convexa

$\exists\, \sigma : [b,c] \longrightarrow B_\rho(y_*)$

contínua, $\sigma(b) = x_*$,

$\sigma(c) = y_*$. Logo

$\tilde{\gamma} = \gamma \vee \sigma : [a,c] \longrightarrow \Omega$

é contínua e satisfaz

$\tilde{\gamma}(a) = x_0$, $\tilde{\gamma}(c) = y_*$.

Assim $y_* \in U$. ∎