

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, Ω aberto em $\mathbb{R}^N$

$f = (f_1, \dots, f_M)$ f_j : componentes de f , $j = 1, \dots, M$

$\{e_1, \dots, e_N\}$: base canônica de $\mathbb{R}^N$; $f_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\{u_1, \dots, u_M\}$: base canônica de $\mathbb{R}^M$

Se $x \in \Omega$, $f(x) \cdot u_j = f_j(x)$

Proposição: Seja $x_0 \in \Omega$. Então f é diferenciável em x_0 se, e só se, cada f_j é diferenciável em x_0 . Além

disto, $f'_j(x_0) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é dada

por $f'_j(x_0)h = (f'(x_0)h) \cdot u_j$

se $h \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração: Se definirmos

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

e se tomarmos o produto escalar

por u_j nos dois lados desta igualdade obtemos

$$\underbrace{\pi(h) \cdot u_j}_{= \pi_j(h)} = f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (f'(x_0)h) \cdot u_j$$

Agora $|\pi_j(h)| = |\pi(h) \cdot u_j| \underset{CS}{\leq} |\pi(h)| |u_j|$

Logo, se f é diferenciável em x_0 temos $\frac{|\pi(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

e portanto $0 \leq \frac{|\pi_j(h)|}{|h|} \leq \frac{|\pi(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$,

o que mostra que f é diferenciável em x_0 e que

$$f'_j(x_0) = (f'(x_0)h) \cdot u_j,$$

$\forall h \in \mathbb{R}^N, \forall j=1, \dots, M.$

Suponhamos, agora, que cada f_j seja diferenciável em x_0 .

Então $\exists f'_j(x_0) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. se

$$r_j(h) = f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - f'_j(x_0)h$$

$$\text{então } \frac{r_j(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \forall j=1, \dots, M.$$

Teremos

$$f(x_0+h) = \sum_{j=1}^M f_j(x_0+h) u_j$$

$$= \sum_{j=1}^M (f_j(x_0) + f'_j(x_0)h + r_j(h)) u_j$$

$$= f(x_0) + \sum_{j=1}^M (f'_j(x_0)h) u_j + r(h),$$

onde $\pi(h) = \sum_{j=1}^M \pi_j(h) u_j$

LOGO: se mostrarmos que $\frac{\pi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ concluímos que

f é diferenciável em x_0 e que $f'(x_0)h = \sum_{j=1}^M (f'_j(x_0)h) u_j$.

Mas $|\pi(h)| = \left| \sum_{j=1}^M \pi_j(h) u_j \right|$
 $\leq \sum_{j=1}^M |\pi_j(h) u_j| = \sum_{j=1}^M |\pi_j(h)| |u_j|$
 $= \sum_{j=1}^M |\pi_j(h)|$

Assim $\frac{|\pi(h)|}{|h|} \leq \sum_{j=1}^M \frac{|\pi_j(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \square$

A matriz de $f'(x_0)$ com relação às bases $\{e_1, \dots, e_N\}$, $\{u_1, \dots, u_M\}$

Lembrar: $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

$$\downarrow$$
$$\{a_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}$$

$$Ae_j = \sum_{i=1}^M a_{ij} u_i$$

Note bem

$$(Ae_j) \cdot u_i = a_{ij}$$

Notação: Lembrar que se

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é diferenciável em x_0 então

$$f'(x_0)h = (D_h f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

$$(D_{e_j} f)(x_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \quad j = 1, \dots, N$$

Logo a matriz que representa $f'(x_0)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respectivamente é dada por

$$\begin{aligned} (f'(x_0)e_j) \cdot u_i &= (D_{e_j} f)(x_0) \cdot u_i \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right) \cdot u_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Agora, } f'_i(x_0)e_j &= (D_{e_j} f_i)(x_0) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

Por outro lado $f'_i(x_0)h = (f'(x_0)h) \cdot u_i$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'_i(x_0)e_j &= (f'(x_0)e_j) \cdot u_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot u_i\end{aligned}$$

Assim $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot u_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$$

Teorema: A matriz de $f'(x_0)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respectivamente é dada por

$$(Jf)(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

matriz
jacobiana
de f
em x_0 .

Observações

- ① A matriz $Jf(x)$ está definida bastando que as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existam em x .
 - ② $J(f)(x)$ fornece a candidata a ser $f'(x)$.
-

Desigualdade do valor médio

Observação: $A \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$. Então,
se $a = A1 \in \mathbb{R}^M$ e por $At = ta, t \in \mathbb{R}$

Agora

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup \{ |At| : |t| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |t| \|a\| : |t| \leq 1 \} \\ &= \|a\|\end{aligned}$$

Lemma: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$
contínua, diferenciável em $]a, b[$
Então $\exists t_0 \in]a, b[$ tal que

$$|f(b) - f(a)| \leq \|f'(t_0)\| (b - a).$$

Demonstração: $z \doteq f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^M$

$$\varphi(t) \doteq z \cdot f(t)$$

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, φ é contínua
em $[a, b]$, diferenciável em
 $]a, b[$.

• φ é contínua: Seja $\bar{t} \in [a, b]$
e seja $\{t_n\}$ uma sequência
em $[a, b]$, $t_n \rightarrow \bar{t}$. Então,
como f é contínua em $\bar{t}$,

Segue que $f(t_m) \xrightarrow{\mathbb{R}^M} f(\bar{t})$,
 o que implica que $Z.f(t_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} Z.f(\bar{t})$,
 $Z.f(\bar{t})$, i.e., $\varphi(t_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(\bar{t})$.

- f é diferenciável em $]a, b[$;
- $x \xrightarrow{\Phi} Z.x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^M$
 (pois é linear)

Assim φ é diferenciável pela regra da cadeia. Lembra que $\Phi'(x)h = \Phi(h)$.

$$\text{Logo } \varphi(t) = \Phi(f(t)) \Rightarrow$$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\Phi'(f(t))}_{\in L(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})} \underbrace{f'(t)}_{\in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)}$$

$\swarrow$
 $\in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\varphi'(t)1 = \bar{\Phi}'(f(t)) [f'(t)1]$$

$$\varphi'(t)'' = \bar{\Phi} [f'(t)1]$$

$$= Z \cdot (f'(t)1)$$

Conclusão $\varphi'(t) = Z \cdot (f'(t)1)$

$$\Rightarrow |\varphi'(t)| \leq |Z| \|f'(t)\|, \forall t \in]a, b[$$

Pelo TVM $\exists t_0 \in]a, b[$:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(t_0)(b-a)$$

$$\Rightarrow |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq |Z| \|f'(t_0)\| (b-a).$$

Agora:

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= Z \cdot f(b) - Z \cdot f(a) \\ &= Z \cdot (f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } |f(b) - f(a)|^2 \leq |f(b) - f(a)| \times \underbrace{|f'(t_0)|}_{\text{max}} (b-a)$$
