$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$

f é derivável ($=$ diferenciável) em $x_0 \in \Omega$:

$\exists\, f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tal que, se

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h),$$

para $|h| < \delta$, então $\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0}$

Aqui $B_\delta(x_0) \subset \Omega$.

- significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$, $\eta < \delta$, tal que
$$|h| \leq \eta \Rightarrow |r(h)| \leq \varepsilon |h|$$

Em particular, tomando, digamos, $\varepsilon = 1$ obtemos $\eta > 0$:

$$|r(h)| \leq |h| \text{ se } |h| \leq \eta.$$

Assim, f diferenciável em x_0 implica:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| = |f'(x_0)h + r(h)|$$
$$\leqslant |f'(x_0)h| + |r(h)|$$
$$\leqslant \|f'(x_0)\|\,|h| + |h|$$

se $|h| \leqslant \eta$.

$$= (\|f'(x_0)\| + 1)|h|$$

Seja $\varepsilon > 0$. Tomo

$$\alpha = \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{\|f'(x_0)\|+1}\right\}$$

Então $|h| \leqslant \alpha$ temos

$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, o que mostra que f é contínua em x_0.

<u>Teorema</u>: Se f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$ então f é contínua em x_0.

Como descobrir se f é diferenciável em um dado ponto x_0?

1) Quem seria $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

Suponha que f seja diferenciável em x_0:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h),$$

p/ $|h| < \delta$, com $\dfrac{r(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Tomo $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$. Se $|t| < \dfrac{\delta}{|h|}$ então $|th| = |t||h| < \delta$ e $\therefore$

$$f(x_0+th) = f(x_0) + f'(x_0)(th) + r(th)$$

$$f(x_0+th) - f(x_0) = t f'(x_0)h + r(th)$$

Logo $f'(x_0)h = \dfrac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} - \dfrac{r(th)}{t}$

para $0 < |t| < \delta/|h|$

Mas $\left|\frac{r(th)}{t}\right| = \left|\frac{r(th)}{t|h|}\right| |h|$

$$= \underbrace{\left|\frac{r(th)}{|th|}\right|}_{\longrightarrow 0 \text{ qdo } t \to 0} |h|$$

<u>Conclusão</u>: Se f é derivável em x_0 então

$$f'(x_0)h = \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t}}$$

Derivada direcional de f na direção h.

$\doteq D_h f(x_0)$

2) Para verificar que f é diferenciável em x_0 procedemos da seguinte forma:

(i) Determinamos $D_h f(x_0)$, $\forall h \neq 0$

(ii) Definimos $f'(x_0)h \doteq D_h f(x_0)$

(iii) Se $h \mapsto D_h f(x_0)$ for linear em h definimos

$$r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

e verificamos se $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$ quando $h \to 0$.

Exemplos

① $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Se $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

$$|f(x_1, x_2)| = \frac{|x_1| \cdot x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\leqslant |x_1|$$

e portanto

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0) \\ (x_1,x_2)\neq(0,0)}} f(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow f \text{ é contínua em } (0,0)$$

$\rightarrow$ f é diferenciável em $(0,0)$?

Se $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ temos

$$\frac{f((0,0) + t(h_1, h_2)) - f(0,0)}{t} =$$

$$\frac{1}{t} f(th_1, th_2) = \frac{t^3 h_1^3}{t^2 h_1^2 + t^2 h_2^3} \frac{1}{t}$$

$$= \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}$$ não é linear em h.

Logo f não é diferenciável na origem

---

2) $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ linear

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f \cdot h$$

Tomo $r(h) = 0$ e portanto

$$f'(x_0) = f \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

REGRA DA CADEIA

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $U \subset \mathbb{R}^M$ aberto,

$f : \Omega \to U$, $g : U \to \mathbb{R}^K$

f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$,

$y_0 = f(x_0) \in U$, g diferenciável em y_0

Então $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^K$ é diferenciável em x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^N \arrow[r, "f'(x_0)"] \arrow[rr, bend right, "g'(y_0) \circ f'(x_0)"'] & \mathbb{R}^M \arrow[r, "g'(y_0)"] & \mathbb{R}^K
\end{tikzcd}$$

Demonstração: $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$

$B = g'(y_0)$

$$r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - Ah$$

$$R(k) = G(y_0+k) - G(y_0) - Bk$$

$$|r(h)| = \varepsilon(h)|h| \qquad \varepsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$|R(k)| = \eta(k)|k| \qquad \eta(k) \xrightarrow{k\to 0} 0$$

Vamos definir, dado h,

$$k \doteq f(x_0+h) - f(x_0).$$

Primeiramente observe que

$$|k| = |f(x_0+h) - f(x_0)| = |r(h) + Ah|$$
$$\leq \varepsilon(h)|h| + \|A\|\,|h|$$
$$= (\|A\| + \varepsilon(h))|h|$$

Queremos mostrar que $g \circ f$ é

diferenciável em x_0 e que
$(g \circ f)'(x_0) = BA$

$$(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0) - BAh =$$
$$= g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - BAh =$$
$$= g(k+y_0) - g(y_0) - BAh =$$
$$= Bk + R(k) - BAh$$

Agora, lembre que

$$k = f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + r(h)$$

Então

$$(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0) - BAh =$$

$$= B(Ah + r(h)) + R(k) - BAh$$

$$= Br(h) + R(k).$$

Logo

$$|(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - BAh|$$

$$= |Br(h) + R(k)| \leq$$

$$\leq |Br(h)| + |R(k)|$$

$$\leq \|B\| \varepsilon(h) |h| + \eta(k) |k|$$

$$\leq \|B\| \varepsilon(h) |h| + \eta(k) (\|A\| + \varepsilon(h)) |h|$$

$$= \underbrace{\left\{ \|B\| \varepsilon(h) + \eta(k) \|A\| + \eta(k) \varepsilon(h) \right\}}_{\longrightarrow 0 \text{ se } h \to 0} |h|$$

Mas $\mathcal{E}(h) \to 0$ quando $h \to 0$

e $h \to 0 \Rightarrow k \to 0 \Rightarrow \eta(k) \to 0$

$\blacksquare$