<u>Teorema</u>: 1) Se $A \in GL(\mathbb{R}^N)$ e se $B \in L(\mathbb{R}^N)$ é tal que $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ então $B \in GL(\mathbb{R}^N)$.

Em particular $GL(\mathbb{R}^N)$ é aberto em $L(\mathbb{R}^N)$.

2) $$\begin{aligned} GL(\mathbb{R}^N) &\xrightarrow{\Lambda} GL(\mathbb{R}^N) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

é contínua

<u>Demonstração</u>: $\beta \doteq \|B-A\|$, $\alpha \doteq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Então $\alpha > \beta$. Tomo $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\alpha|x| = \alpha|A^{-1}Ax| \leq \alpha\|A^{-1}\||Ax|$$

$$= |Ax| = |(A-B)x + Bx| \leq$$

$$|(A-B)x| + |Bx| \leq \|A-B\||x| + |Bx|$$

$$= \beta|x| + |Bx|$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\overset{>0}{(\alpha-\beta)}|x| \leq |Bx|$

Em particular, se $Bx = 0$ então $x = 0$, ie, B é injetora e ∴ $B \in GL(\mathbb{R}^N)$

Note, também, que

$$(\alpha-\beta)|x| \leq |Bx|, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow$$

$$(\alpha-\beta)|B^{-1}y| \leq |y|, \ \forall y \in \mathbb{R}^N$$

ou $|B^{-1}y| \leq \dfrac{1}{\alpha-\beta}|y|, \ \forall y \in \mathbb{R}^N$

Conclusão: $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha-\beta}$

2) Fixemos $A \in GL(\mathbb{R})$. Vamos provar que Λ é contínua em A.

Seja $B \in B_\alpha(A) \subset GL(\mathbb{R}^N)$

Então $d(\Lambda(B), \Lambda(A)) =$

$$= \|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\|$$

$$\leq \|B^{-1}\| \, \|A-B\| \, \|A^{-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{1}{\alpha} d(B,A)$$

Seja $r = \frac{\alpha}{2}$ e consideremos a bola $B_r(A) \subset GL(\mathbb{R}^N)$.

Se $B \in B_r(A)$ temos

$$\|B-A\| < r \text{ e portanto}$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \|B-A\| \geq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha-\beta} \leq \frac{2}{\alpha}$$

Conclusão: se $B \in B_r(A)$ então

$$d(\Lambda(B), \Lambda(A)) \leq \frac{2}{\alpha^2} d(B,A)$$

Dado $\varepsilon > 0$ tomo $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}, r\right\}$.

Se $d(B,A)<\delta$ então

$$d(\Lambda(B),\Lambda(A))<\varepsilon \quad \blacksquare$$

Sejam $\{e_1,\dots,e_N\}$, $\{f_1,\dots,f_M\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respectivamente. Se $A\in L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ a matriz de A relativa às bases $\{e_1,\dots,e_N\}$ e $\{f_1,\dots,f_M\}$ é definida por

$$Ae_j=\sum_{i=1}^{M} a_{ij}f_i$$

$$\{a_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}}\in \mathcal{M}(M,N)$$

<u>Proposição</u>: $\|A\|\leq\left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2}$

<u>Dem</u>: Seja $x\in\mathbb{R}^N$. Então, se $x=(x_1,\dots,x_N)=\sum_{j=1}^{N} x_je_j$ temos

$$Ax = \sum_{j=1}^{N} x_j A e_j = \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{i=1}^{M} a_{ij} f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right) f_i$$

Assim

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right)^2$$

Para cada $i = 1, \ldots, M$ fixado seja $\Theta_i = (a_{i1}, \ldots, a_{iN}) \in \mathbb{R}^N$

Temos

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{M} (\Theta_i \cdot x)^2$$

$$\underset{CS}{\leq} \sum_{i=1}^{M} |\Theta_i|^2 |x|^2$$

$$= |x|^2 \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)$$

Extraindo a raiz quadrada

$$|Ax| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2} |x| \quad \blacksquare$$

A noção de derivada

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto; $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in \Omega$

$f'(x_0) = ?$

Caso $N = M = 1$. $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ aberto

Seja $x_0 \in I$. Então é derivável em x_0 se existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{está definida em }]-\delta, \delta[\setminus \{0\}} \qquad]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$$

Então $a := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

então $f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{ah}_{} + r(h)$

onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ "a" $\in L(\mathbb{R})$

<u>Definição</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$.

Dizemos que f é derivável em $x_0 \in \Omega$ se existir $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tal que, se definirmos

$r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - Ah$

então $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$

<u>OBS</u>: $\exists\, \delta > 0$ tal $B_\delta(x_0) \subset \Omega$.

Assim r está definida em $B_\delta(0)$

e portanto $\frac{r(h)}{|h|}$ está definida em $\mathring{B}_\delta(0)$.

<u>Proposição</u>: Nas condições acima, A é unicamente determinada.

<u>Dem.</u> Sejam $A_1, A_2 \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$:

$$r_1(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - A_1 h$$

$$r_2(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - A_2 h$$

então $\lim_{h\to 0} \frac{r_1(h)}{|h|} = 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{r_2(h)}{|h|} = 0$

Seja $A \doteq A_1 - A_2 \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.

$$Ah = r_2(h) - r_1(h) \doteq r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$

$h \in B_\delta(0)$

Seja $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Seja $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < \frac{\delta}{|v|}$. Então $|tv| < \delta$ e portanto

$$A(tv) = r(tv) \Rightarrow$$

$$tAv = r(tv) \Rightarrow$$

$$Av = \frac{1}{t} r(tv) \Rightarrow$$

$$Av = \underbrace{\frac{r(tv)}{|tv|}}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0} \cdot |v| .$$

Conclusão: $Av = 0$ e $\therefore A = 0$

—————— // ——————

Se f é derivável em x_0 então $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$, unicamente determinada, recebe a notação

$$A \doteq \underbrace{f'(x_0)}_{:= \text{derivada de } f \text{ no ponto } x_0.} \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

<u>Definição</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$

Dizemos que f é derivável em Ω se f é derivável em cada ponto de Ω

Neste caso existe $f'(x)$, $\forall x \in \Omega$

<u>Função derivada</u>: $f': \Omega \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$