$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$: espaço vetorial das transformações lineares $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Definimos $\|A\| \equiv \sup \{ |Ax| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1 \}$

Vimos: $|Ax| \leq \|A\| |x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow |Ax - Ay| \leq \|A\| |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Logo, se $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ então A é uniformemente contínua.

Obs: Seja $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaça: $|Ax| \leq \lambda |x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$
Então $\|A\| \leq \lambda$.

Dem. Da hipótese segue que $|Ax| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq 1$ e portanto λ é limitante superior de $\{ |Ax| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1 \}$

Logo, $\|A\| \leq \lambda \quad \square$

Teorema: ① $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

② $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A$ pertencente a $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

③ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B$.

Em particular, se definirmos

$$d(A, B) = \|A - B\|, \quad A, B \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

então d é uma distância em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$, que o torna um espaço métrico completo.

Dem. ① Como A é linear, $A0 = 0$
e portanto $|A0| = 0 \in \{|Ax| : |x| \leq 1\}$
 $\Rightarrow \|A\| \geq 0$.

Se $A = 0$ então $\{|Ax| : |x| \leq 1\} = \{0\}$
e portanto $\|A\| = \sup\{0\} = 0$.

Reciprocamente, se $\|A\| = 0$ então

$$|Ax| \leq \|A\| |x| = 0 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Assim $Ax = 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, ie, $A = 0$.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \|\alpha A\| &= \sup\{ |(\alpha A)x| : |x| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |\alpha(Ax)| : |x| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |\alpha| |Ax| : |x| \leq 1 \} \\ &\stackrel{?}{=} |\alpha| \sup\{ |Ax| : |x| \leq 1 \} = |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

Na realidade: seja $B \subset [0, \infty[$, limitada superiormente. Então, se $\lambda \geq 0$,
 $\sup\{\lambda b : b \in B\} = \lambda \sup B$

③ Se $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |(A+B)x| &= |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \\ &\leq \|A\| |x| + \|B\| |x| \\ &= (\|A\| + \|B\|) |x|. \end{aligned}$$

Logo $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \square$

$d(A, B) = \|A - B\|$ é uma distância em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$:

i) $d(A, B) \geq 0$, $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

ii) $d(A, B) = \|A - B\| = \|-(B - A)\| \stackrel{②}{=} \|B - A\|$
 $\forall A, B \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ $= d(B, A)$

iii) $d(A, B) = \|A - B\| = \|A - C + C - B\|$

$\forall A, B, C \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) \leq \|A - C\| + \|C - B\| =$

③

$$= d(A, C) + d(C, B).$$

$L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ é um espaço métrico completo:

→ Seja $\{A_m\}$ uma sequência de Cauchy em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N} : m, n \geq m_0 \Rightarrow$

$$\|A_m - A_n\| = d(A_m, A_n) \leq \varepsilon.$$

Logo $|A_m x - A_n x| = |(A_m - A_n)x| \leq \varepsilon$

se $|x| \leq 1$ e se $m, n \geq m_0$.

Em particular, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \leq 1$, $\{A_m x\}$ é Cauchy em $\mathbb{R}^M$.

Como $\mathbb{R}^M$ é completo, $\{A_m x\}$ converge em $\mathbb{R}^M$

para $x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 1$. Agora, se

$x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$, então $y = \frac{x}{|x|}$ satisfaz

$|y| = 1$ e portanto $\{A_m y\}$ converge.

Assim $\{A_m x\}$ também converge
pois $A_m x = |x| A_m y$, $\forall m$.

Conclusão: $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} A_m x$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Defina $Ax := \lim_{m \rightarrow \infty} A_m x$, $x \in \mathbb{R}^N$;

$$A_m \xrightarrow{p} A.$$

Afirmo: $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. De fato:

• se $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$A_m(x+y) = A_m x + A_m y$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & \end{array}$$

$$A(x+y) = Ax + Ay$$

• Análogamente, $A(\lambda x) = \lambda Ax$,
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N$

Resumo: $\{A_m\}$ Cauchy em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$
implica que $\exists A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tal
que $A_m \xrightarrow{p} A$.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$: $m, n \geq m_0 \Rightarrow$

$$|A_m x - A_n x| \leq \varepsilon, \quad \forall x, |x| \leq 1$$

Como antes (vê demonstrações do
critério de Cauchy p/ convergência
uniforme), fixamos x, m e $\varepsilon > 0$
e fazemos $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$|A_m x - A x| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq m_0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 1$$

Assim $\|A_m - A\| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq m_0$, i.e.,

$$A \xrightarrow[m]{L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)} A. \quad \square$$

Proposição: Se $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e
 $B \in L(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^K)$ então

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$$

$$\boxed{\mathbb{R}^N \xrightarrow{A} \mathbb{R}^M \xrightarrow{B} \mathbb{R}^k}$$

Dem. Se $x \in \mathbb{R}^N$

$$|(BA)x| = |B(Ax)| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$$

$\forall x \in \mathbb{R}^N$

$$L(\mathbb{R}^N) = L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$$

$$GL(\mathbb{R}^N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N) : A \text{ inversível}\}$$

$A \in L(\mathbb{R}^N)$ é inversível se $\exists A^{-1} \in L(\mathbb{R}^N)$

t.q. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (identidade em $\mathbb{R}^N$)
 $Ix = x, \forall x \in \mathbb{R}^N$

NB: $A \in GL(\mathbb{R}^N)$

$\Leftrightarrow A$ é injetora ($\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$)

$\Leftrightarrow A$ é sobrijetora

Obs. $GL(\mathbb{R}^N)$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^N$ mas é subgrupo de $L(\mathbb{R}^N)$:

- Se $A, B \in GL(\mathbb{R}^N)$ então $AB \in GL(\mathbb{R}^N)$
e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

TEOREMA: (1) $A \in GL(\mathbb{R}^N)$, se $B \in L(\mathbb{R}^N)$ e se
 $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ então $B \in GL(\mathbb{R}^N)$

ie $B_{\frac{1}{\|A^{-1}\|}}(A) \subset GL(\mathbb{R}^N)$.

[em particular $GL(\mathbb{R}^N)$ é
aberto em $L(\mathbb{R}^N)$]

(2) $GL(\mathbb{R}^N) \rightarrow GL(\mathbb{R}^N)$
 $A \mapsto A^{-1}$ é contínua.