

Exemplo: Seja $\{a_m\}$ uma sequência de números reais limitada. Então a série de funções $\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-mx}$ define uma função infinitamente diferenciável em $]0, \infty[$.

De fato: Se $p \in \mathbb{Z}_+$ então

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m (-m)^p e^{-mx}$$

converge uniformemente em qualquer intervalo $[a, b] \subset]0, \infty[$.

Usaremos o M-teste de Weierstrass

Primeiramente observamos que $\exists C > 0$ t.q. $|a_m| \leq C, \forall m$. Logo

$$|a_m (-m)^p e^{-mx}| \leq \underbrace{C m^p e^{-ma}}_{M_m}, \forall x \in [a, b]$$

Precisamos verificar que $\sum_{m=1}^{\infty} M_m < \infty$

Teste da razão

$$\frac{M_{m+1}}{M_m} = \frac{C(m+1)^p e^{-ma-a}}{Cm^p e^{-ma}} = \frac{(m+1)^p}{m^p} e^{-a}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^p e^{-a}$$
$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-a} < 1$$

Logo $\sum_{m=1}^{\infty} M_m < \infty$, donde que

$\sum_{m=1}^{\infty} a_m (-m)^p e^{-mx}$ converge uniforme-
mente em $[a, b]$, $\forall [a, b] \subset]0, \infty[$

Em particular $\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-mx} = f(x)$

é uma função contínua em $]0, \infty[$
pois temos convergência uniforme
sobre $[a, b] \subset]0, \infty[$, $\forall [a, b]$.

De fato é continuamente diferenciável

$$S_N(x) = \sum_{m=1}^N a_m e^{-mx}; \quad S_N \xrightarrow[u]{[a,b]} f \quad \forall [a,b]$$

$$S'_N(x) = \sum_{m=1}^N a_m (-m) e^{-mx}; \quad S'_N \xrightarrow[u]{[a,b]} g \quad \forall [a,b]$$

Logo, pelo teorema da aula passada
 $f' = g$ em $]0, \infty[$. Iterando, obtemos
 que f é C^∞ em $]0, \infty[$.

→ Note que $f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-m) e^{-mx}$

Teorema : X : espaço métrico compacto,
 $\{f_m\}$: sequência de funções $f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$
 contínuas, monotona (ou $f_m \leq f_{m+1}, \forall m$,
 ou $f_{m+1} \leq f_m, \forall m$). Se $f_m \xrightarrow{p} f$ em X
 e se f é contínua então $f_m \xrightarrow{u} f$.

(Teorema de Dini)

Demonstração: Podemos assumir $f_{n+1} \leq f_n$ para todo n . Definimos $\{g_n\}$

$$g_n = f_n - f$$

Então $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g_n \geq 0$,

$$g_{n+1} \leq g_n, \quad g_n \xrightarrow{p} 0.$$

Quero mostrar
que $g_n \xrightarrow{u} 0$

Seja $\varepsilon > 0$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$K_n = \{x \in X; g_n(x) \geq \varepsilon\}$$

Propriedades de K_n :

$$K_n = g_n^{-1}(\underbrace{[\varepsilon, \infty[)}_{\text{fechado em } \mathbb{R}}$$

fechado em $\mathbb{R}$

Como g_n é contínua em X , K_n é fechado em X . Mas, como X é compacto,

segue que $K_n \subset X$ é compacto

Temos também $K_{n+1} \subset K_n, \forall n$.
(por definição dos K_n)

Vamos mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

De fato, seja $x \in X$ arbitrário.

Então existe $n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow$

$$g_n(x) \leq \varepsilon/2$$

(pois $g_n \xrightarrow{p} 0$)

Logo, dado $x \in X$ temos $x \notin K_n$,
 $\forall n \geq n_0$ e portanto $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Conclusão $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Por um
importante teorema de compactos,
segue que $\exists N \in \mathbb{N} : K_N = \emptyset$ e

portanto $K_m = \emptyset$, $\forall m \geq N$. Isto
se $m \geq N$ $q_m(x) < \varepsilon$, $\forall x \in X$
ie, $q_m \xrightarrow{u} 0$ $\square$

Transformações lineares

$L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$: espaço das transformações
lineares de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^M$

$A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M) \Leftrightarrow A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$:

$$\begin{cases} A(x+y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) = \lambda Ax, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$: espaço vetorial de dimen-
são MN

Fixemos bases $\{e_1, \dots, e_N\}$, $\{f_1, \dots, f_M\}$
bases de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respectivamente
e seja $A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$.

Fixado $j \in \{1, \dots, N\}$

$$Ae_j = \sum_{i=1}^M a_{ij} f_i$$

$\{a_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}$: matriz de A com relação às bases $\{e_1, \dots, e_N\}, \{f_1, \dots, f_M\}$

Logo $x \in \mathbb{R}^N$, $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$,

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^N x_j Ae_j = \sum_{j=1}^N x_j \sum_{i=1}^M a_{ij} f_i = \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \right) f_i. \end{aligned}$$

$\mathcal{M}(M, N; \mathbb{R})$: espaço das matrizes $M \times N$ com entradas reais

$$\begin{aligned} L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M) &\xrightarrow{\Lambda} \mathcal{M}(M, N; \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \{a_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \quad \mathbb{R}^{MN} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços
vetoriais.

Queremos definir uma métrica em
 $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ que seja independente
da escolha de bases em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$
e que só dependa das métricas
em $\mathbb{R}^N$ e em $\mathbb{R}^M$.

Definição: Dada $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

definimos a norma de A como

sendo $\|A\| = \sup\{|Ax| : |x| \leq 1\}$

Note que $\{|Ax| : |x| \leq 1\}$ é limitado
superiormente. De fato, seja $\{e_1, \dots, e_N\}$
a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Então,

se $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \leq 1$, temos

$$|Ax| = \left| A \left(\sum_{j=1}^N x_j e_j \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^N x_j A e_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \underbrace{|\alpha_j|}_{\leq |\alpha| \leq 1} |Ae_j| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^N |Ae_j|}_{\text{é limitante superior de } \{|Ax| : |\alpha| \leq 1\}}$$

→ é limitante superior de
 $\{|Ax| : |\alpha| \leq 1\}$

Note que: 1) $A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ então

$$(*) \quad |Ax| \leq \|A\| |\alpha|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, se $x = 0$ então (*). Se $x \neq 0$ então $y = \frac{x}{|x|}$ tem norma $|y| = 1$. Assim $|Ay| \leq \|A\|$, ie

$$\left| A\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq \|A\| \Rightarrow |Ax| \leq \|A\| |x|$$

Em particular $|Ax - Ay| = |A(x - y)|$
 $\leq \|A\| |x - y|$

Conclusão: $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ linear
é Lipschitz e, em particular, uniforme-
mente contínua.