$(X, d_X), (Y, d_Y)$; $f: X \to Y$. f é uniformemente contínua em X se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$\forall p, q \in X,\ d_X(p,q) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$

Prop. Se $f: X \to Y$ é uniformemente contínua e se $\{x_n\}$ é Cauchy em X então $\{f(x_n)\}$ é Cauchy em Y.

Dem. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é un. contínua existe $\delta > 0$:

$p, q \in X,\ d_X(p,q) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$

Como $\{x_n\}$ é Cauchy, existe n_0:

$m, n \geq n_0 \Rightarrow d_X(x_m, x_n) < \delta$

Logo, $m, n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$

Teorema: Sejam $E \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $f: E \to \mathbb{R}$ unif. contínua. Então f é limitada, ie, $f(E)$ é limitado em $\mathbb{R}$.

Lembrar: $E =]0,1] \subset \mathbb{R}$ $(N=1)$

$f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Temos $f(E) = [1, \infty[$ (não limitado)

Logo f não unif. contínua

Dem: Suponha que f não seja limitada. Logo, p/ todo $n \in \mathbb{N}$, $f(E) \not\subset [-n, n]$

Assim, para todo n $\exists\, x_n \in E$

tal que $|f(x_n)| > m$. Então $\{x_n\}$ é uma sequência em E. Como E é limitado, $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ e portanto, pelo teorema de Weierstrass, $\exists \{x_{n_k}\}$ convergente. Em particular $\{x_{n_k}\}$ é Cauchy o que implica que $\{f(x_{n_k})\}$ é de Cauchy, pois f é un. cont. Logo $\{f(x_{n_k})\}$ é limitada. Assim $\exists M > 0 : |f(x_{n_k})| \leq M$

para todo k e portanto

$$n_k < |f(x_{n_k})| \leq M, \forall k.$$

Isto é uma contradição ▨

Continuidade e conexidade

Teorema: Sejam X, Y espaços métricos e $f: X \to Y$ contínua. Se X for conexo então $f(X)$ é conexo.

Dem. Suponha $f(X)$ desconexo. Então existem U_1, U_2 abertos em Y tais que:

1) $U_1 \cap f(X) \neq \emptyset$
2) $U_2 \cap f(X) \neq \emptyset$

3) $[U_1 \cap f(X)] \cap [U_2 \cap f(X)] = \phi$

4) $[U_1 \cap f(X)] \cup [U_2 \cap f(X)] = f(X)$

Sejam $V_1 = f^{-1}(U_1)$, $V_2 = f^{-1}(U_2)$

Como f é contínua, V_1 e V_2 são abertos em X.

- $V_1 \neq \phi$. $\exists\, y \in U_1 \cap f(X)$. Seja $x \in X$: $f(x) = y$. Então $x \in V_1$, pois $y \in U_1$.
- $V_2 \neq \phi$ (mesmo argumento)
- $V_1 \cap V_2 = \phi$. De fato, seja $\bar{x} \in V_1 \cap V_2$. Então $f(\bar{x}) \in U_1$

e $f(\bar{x}) \in U_2$. Mas $f(\bar{x}) \in f(X)$ e $\therefore f(\bar{x}) \in U_1 \cap U_2 \cap f(X)$ ↯

- $V_1 \cup V_2 = X$. De fato, se $x \in X$ então $f(x) \in f(X)$ e portanto ou $f(x) \in U_1$ ou $f(x) \in U_2$. Logo, ou $x \in V_1$ ou $x \in V_2$.

Em resumo: $f(X)$ desconexo $\Longrightarrow X$ desconexo ▨

Corolário: Sejam X espaço métrico conexo e $f: X \to \mathbb{R}$ contínua. Sejam $x, y \in X$ e suponha que $t \in \mathbb{R}$,

$f(x) < t < f(y)$. Então $\exists z \in X$: $f(z) = t$ [Teorema do valor intermediário]

Dem. X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo em $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(X)$ é um intervalo.

Sequências de funções

X: conjunto não vazio.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : X \to \mathbb{R}$

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{f_n\}$: sequência de funções de X em $\mathbb{R}$.

Para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}$

é uma sequência de números reais.

Definição: Seja $f: X \to \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$. Escrevemos $f_n \xrightarrow{p} f$. Isto significa:

Dado $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Digressão com exemplos

1) X espaço métrico, $f_n : X \to \mathbb{R}$ cada uma delas contínua.

$$f_n \xrightarrow{p} f \overset{?}{\Longrightarrow} f \text{ contínua}$$

Resposta: não.

$X = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$.

$$f_n \xrightarrow{p} f \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$x^n = e^{n \log x} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad 0 \le x < 1$$

2) $X =]a,b[$ $a < b$, $\{f_n\}$

tal que f_n são continuamente diferenciáveis em $]a,b[$, $f_n \xrightarrow{p} f$ e assuma também que f' seja continuamente diferenciável. É verdade que $f_n' \xrightarrow{p} f'$

Resp. $]a,b[= \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}(nx)$$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} |\operatorname{sen}(nx)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e portanto $f_n \xrightarrow{p} 0$

Mas $f_n'(0) = \sqrt{n} \longrightarrow \infty$

3) $X = [a,b]$, $f_n \xrightarrow{p} f$

f_n, f: contínuas em $[a,b]$.

. É verdade que $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$?

Resposta: não

$f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$

$f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$. Para

$0 < x < 1$,

$f_n(x) = nxe^{n\log(1-x^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

[usando o seguinte fato:

$\forall p \in \mathbb{N},\ a>0 \quad t^p e^{-at} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$]

Logo $f_n \xrightarrow{p} 0$. Agora

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx$$

$x^2 = y$

$x\,dx = \frac{1}{2}dy$

$$= \frac{n}{2}\int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

$$= \frac{n}{2}\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{n}{2}\,\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$f_n \xrightarrow{p} 0, \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow \frac{1}{2}$$ ▨