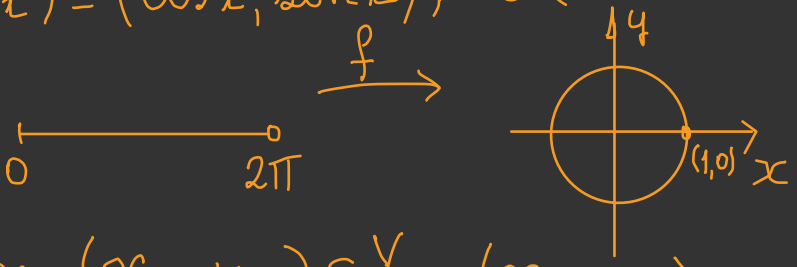
Questão: X, Y esp. métricos, $f: X \to Y$ contínua e bijetora. Quando $f^{-1}: Y \to X$ é contínua?

Em geral a resposta é não:

$X = [0, 2\pi[$, $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t < 2\pi$



Se $(x_n, y_n) \in Y$, $(x_n, y_n) \to (1,0)$, com $y_n < 0, \forall n$, $f^{-1}(x_n, y_n) \to 2\pi \notin X$

Logo f^{-1} não é contínua em $(1,0)$.

Teorema: Se X, Y são espaços métricos com X compacto, se $f: X \to Y$ é contínua e bijetora então $f^{-1}: Y \to X$ é contínua.

Dem. Vamos demonstrar que dado $F \subset X$ fechado em X então $(f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado em Y. De fato, se $F \subset X$ é fechado em X então F é compacto e ∴

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ é compacto em Y e, em particular, fechado em Y. □

Continuidade uniforme

Seja $f: X \to Y$ contínua (X, Y: esp. métricos)
Esta propriedade é equivalente à:

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x) > 0$:

$\left(y \in X, d_X(y, x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon \right)$

Definição: Seja $f: X \to Y$. Dizemos que f é uniformemente contínua em X se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$(\forall x, y \in X, d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

Exemplo: Suponha que f satisfaça uma condição de Lipschitz, ie, que exista uma constante $k > 0$:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k\, d_X(x, y), \forall x, y \in X$$

Então f é uniformemente contínua.
[dado $\varepsilon > 0$ tomo $\delta = \varepsilon/(k+1)$].

Exemplo: $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, \infty[$

$Y = \mathbb{R}$ $\quad$ ($\{X =]0,1]$)

$f : X \to Y$, $f(x) = 1/x$.

f não é uniformemente contínua.

Por contradição: suponha que sim.

Então existirá $\delta > 0$ t.q. se $x, y \in X$

$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

Seja $a \in X$ e tomo $x = a$, $y = a + \frac{\delta}{2}$.

Então $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e portanto

$$\left|f(a) - f\left(a + \frac{\delta}{2}\right)\right| < 1 \quad \forall a > 0$$

Logo $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a + \delta/2}\right| < 1, \ \forall a > 0$

$$\frac{\delta/2}{a(a+\delta/2)} < 1, \quad \forall a>0$$

ou,

$$\frac{\delta}{2} < \underbrace{a\left(a+\frac{\delta}{2}\right)}_{\to 0 \text{ qdo } a \to 0}, \quad \forall a>0 \;\}$$

<u>Teorema</u>: X, Y: espaços métricos, $f: X \to Y$ contínua. Se X é compacto então f é uniformemente contínua.

<u>Pausa</u>: número de Lebesgue de uma cobertura

<u>Definição</u>: Sejam (X, d) um espaço métrico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de abertos de X, com $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dizemos que $\lambda > 0$ é <u>um número de Lebesgue de</u> $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se:

Dado $S \subset X$, $\delta(S) < \lambda$ então existe $\alpha \in A$ tal que $S \subset U_\alpha$.

Proposição: Se X é um espaço métrico compacto então dada qualquer família de abertos cuja reunião é igual a X esta admite um número de Lebesgue.

Dem. Por contradição. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de abertos de X com

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

que não admite número de Lebesgue. Em particular $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ não é número de Lebesgue de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, isto é, para cada n existe $S_n \subset X$, com $\delta(S_n) < 1/n$ e $S_n \not\subset U_\alpha$, $\forall \alpha \in A$

Note que $S_n \neq \emptyset$, $\forall n$, e portanto

posso tomar $x_n \in S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Então $\{x_n\}$ é uma sequência em X. Como X é compacto, existe $\{x_{n_k}\}$ t.q. $x_{n_k} \xrightarrow{X} x$. Existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} é aberto então $\exists r > 0$ t.q. $B_r(x) \subset U_{\alpha_0}$. Finalmente, se $k \in \mathbb{N}$ e se $y \in S_{n_k}$ temos

$$d(y,x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$$

$$\leq \delta(S_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$$

$$d(y,x) \leq \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x)$$

Vamos escolher, agora, o nosso k:

. Tomo $k_0 \in \mathbb{N}$: $k \geq k_0 \Rightarrow \frac{1}{m_k} < \frac{\pi}{2}$

. Tomo $k_1 \in \mathbb{N}$: $k \geq k_1 \Rightarrow d(x_{m_k}, x) < \frac{\pi}{2}$

Logo, se $\bar{k} = \max\{k_0, k_1\}$ então

$$d(y,x) < \pi \text{ se } y \in S_{m_{\bar{k}}},$$

ie, $S_{m_{\bar{k}}} \subset B_\pi(x) \subset U_{\alpha_0}$ ↯

Dem. do teorema: Suponha f contínua e seja $\varepsilon > 0$. Dado $x \in X$ existe

$\delta(x) > 0$ t.q. $y \in B_{\delta(x)}(x) \Rightarrow d_Y(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Logo, se $y_1, y_2 \in B_{\delta(x)}(x)$ então

$$d_Y(f(y_1), f(y_2)) \leq d_Y(f(y_1), f(x)) + d_Y(f(x), f(y_2))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Resumindo: para cada $x \in X$

existe $B_{\delta(x)}(x)$ t.q.

$$y_1, y_2 \in B_{\delta(x)}(x) \Longrightarrow d_Y(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$$

Considere $\{B_{\delta(x)}(x)\}_{x \in X}$. Esta é uma família de abertos de X com reunião igual a X. Como X é compacto, existe $\delta > 0$, número de Lebesgue desta família. Logo, se $p, q \in X$ com $d_X(p,q) < \delta$ então $S = \{p, q\}$ tem diâmetro $< \delta$ e portanto existe $x_0 \in X$: $S \subset B_{r_{x_0}}(x_0)$. Assim $p, q \in B_{r_0(x_0)}(x_0)$ e portanto $d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$ ↯