

Def. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ esp. métricos
 $f: X \rightarrow Y$. Dizemos que f satisfaz
uma condição de Lipschitz [f (CL)]
se existir $k > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y), \forall x, y \in X$$

Se f (CL) então f é contínua em X

De fato, seja $x_0 \in X$ e seja $\varepsilon > 0$.
Tome $\delta = \varepsilon/k > 0$. Então

$$\begin{aligned} d_X(x, x_0) < \delta &\Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) \\ &\leq k d_X(x, x_0) \\ &< k \delta = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

Exemplos em $\mathbb{R}^N$

$$\pi_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_i(x) = x_i$$

Se $x = (x_1, \dots, x_N)$. Se $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$|x_i - y_i| \leq \left\{ \sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2 \right\}^{1/2} = |x - y|$$

$\forall i = 1, \dots, N$. Logo

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Logo $\pi_i(C_L)$ e portanto, em particular, π_i são contínuas em $\mathbb{R}^N$

$$\pi_i(x) = x_i, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Logo, se $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}_+$,

$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N}$
é contínua. Mas as funções

constantas também são contínuas
e portanto

$$P(x) = \sum_{\text{finita}} C_{m_1, \dots, m_N} x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N}$$

é contínua em $\mathbb{R}^N$ [aqui
 $C_{m_1, \dots, m_N}$ são números reais]
→ expressão geral de um polinômio em $\mathbb{R}^N$.

$x \mapsto \|x\|$ [de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$] é (CL)
e portanto contínua

De fato $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$. Dem.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

e portanto $|x| - |y| \leq |x - y|$

Agora $x \leftrightarrow y$ fornece

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y| \quad \square$$

Por exemplo, se $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$,
onde X é um espaço métrico,
é contínua então

$|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$
é contínua, pois é composta
de contínuas.

Teorema: $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços
métricos, $f: X \rightarrow Y$. Então f
é contínua em $X \iff$

$(\forall U \subset Y \text{ aberto em } Y \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X)$

Derm. $\Rightarrow$ Seja $U \subset Y$ aberto em Y e seja $x_0 \in f^{-1}(U)$.

Então $f(x_0) \in U$. Como U é aberto em Y existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon^Y(f(x_0)) \subset U$. Como f é contínua em X , f é contínua em x_0 e portanto existe $\delta > 0$:

$$f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0)) \subset U$$

Logo $B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(U)$ e portanto $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

$\Leftarrow$ Seja $x_0 \in X$ e seja $\varepsilon > 0$.

Como $B_\varepsilon^Y(f(x_0))$ é um aberto de Y então $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x_0)))$ é aberto em X . Como $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x_0)))$ existe $\delta > 0 : B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x_0)))$ e $\therefore f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0))$. Logo f é contínua em x_0 .

Corolário : $(X, d_X), (Y, d_Y)$ esp. métricos
 $f : X \rightarrow Y$. Então f é contínua em $X \iff$

$\forall F \subset Y$ fechado em $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ é fechado em X .

Dem. $\Rightarrow$ Seja $F \subset Y$ fechado em Y . Então $Y \setminus F$ é aberto em Y e portanto $f^{-1}(Y \setminus F)$ é aberto em X . Mas

$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$
e portanto $f^{-1}(F)$ é fechado em X .

$\Leftarrow$ Basta provar que $f^{-1}(U)$ é aberto em X , $\forall U \subset Y$ aberto em Y . Mas se $U \subset Y$ é aberto em Y então $Y \setminus U$ é fechado em $Y \Rightarrow$

$f^{-1}(Y \setminus U)$ é fechado em X

Mas $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$
e $\therefore f^{-1}(U)$ é aberto em X $\square$

Exemplo: Seja $P(x)$ um polinômio em $\mathbb{R}^N$. Então

$$Z_P = \{x \in \mathbb{R}^N : P(x) = 0\}$$

Então Z_P é fechado em $\mathbb{R}^N$

$$Z_P = P^{-1}(\{0\}) \text{ e}$$

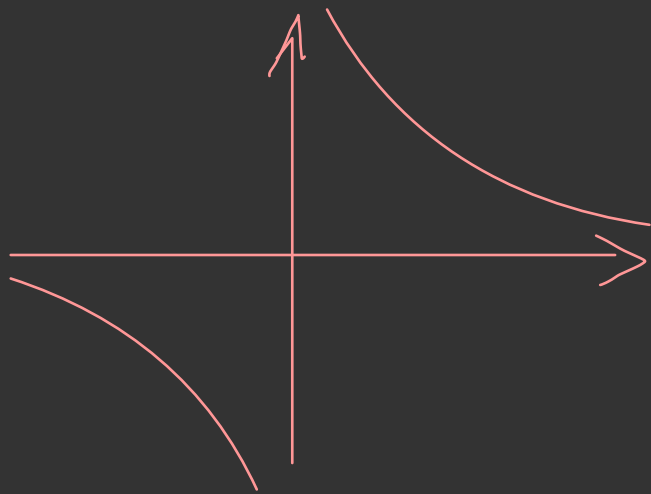
$\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. (lembre que P é contínua).

Exemplo $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$

F é fechado em $\mathbb{R}^2$ pois
se $p(x, y) = xy$ então

$F = p^{-1}(\{1\})$. Agora, se

$\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \pi_1(x, y) = x$
então $\pi_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$
não é
fechado
em $\mathbb{R}$.

Continuidade e compacidade

Teorema: Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos e $f: X \rightarrow Y$ contínua em X . Se X for compacto então $f(X)$ é compacto (em Y).

Dem. Temos que mostrar que $f(X)$ é compacto. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de abertos de Y tal que $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Como f é contínua, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é uma fa-

múlia de abertos de X e

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_{\alpha}) \text{ pois}$$

se $x_0 \in X$ então $f(x_0) \in f(X)$
e logo existe $\alpha_0 \in A : f(x_0) \in U_{\alpha_0}$
ie, $x_0 \in f^{-1}(U_{\alpha_0})$. Como X

é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A$
t.q. $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_m})$

Assim, se $\bar{y} \in f(X)$ existe
 $\bar{x} \in X$ t.q. $f(\bar{x}) = \bar{y}$ e existe
 α_j ($j=1, \dots, m$) t.q. $\bar{x} \in f^{-1}(U_{\alpha_j})$

Logo $\bar{y} = f(\bar{x}) \in U_{\alpha_j}$. Conclusão: $f(X) \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_m}$ $\square$

Corolário: Sejam X um espaço métrico compacto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então assume máximo e mínimo em X .

Isto é, existem $x_*, x^* \in X$ t.q.
 $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \forall x \in X$

Dem. $f(X)$ é compacto em $\mathbb{R}$ e portanto é fechado e limitado. Logo

$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$
é fechado e limitado
superiormente e inferiormente

$$\exists \sup f(X) \in f(X)$$

$$\inf f(X) \in f(X)$$

pois $f(X)$
é fechado

$$\text{Logo } \sup f(X) = f(x^*)$$

$$\inf f(X) = f(x_*)$$

para $x_*, x^* \in X$.

Definição : $(X, d_x), (Y, d_y)$

$f: X \rightarrow Y$ contínua, bijetora

$$\exists f^{-1}: Y \rightarrow X \quad \begin{cases} f^{-1} \circ f = I_X \text{ e} \\ f \circ f^{-1} = I_Y \end{cases}$$

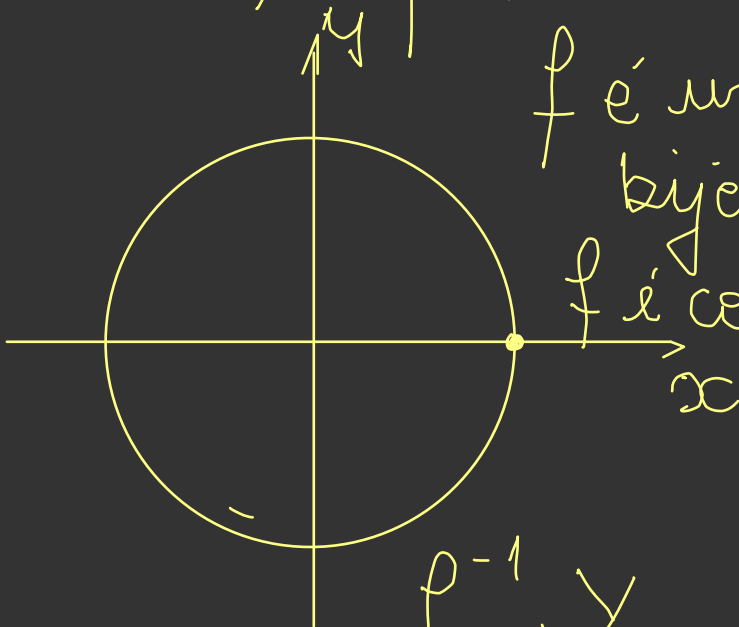
f^{-1} é contínua?

Em geral isto não é verdade!

Exemplo: $X = [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \bigcap_{\mathbb{R}^2} x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$f: X \rightarrow Y \quad f(t) = (\cos t, \sin t)$$



f é uma
bijecção
 f é contínua

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

não é contínua
em $(1,0)$