

Continuidade

Def. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ esp. métricas

$E \subset X, f: E \rightarrow Y, x_0 \in E', y \in Y$

Vamos escrever $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$

se vale:

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que:} \\ x \in E, 0 < d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \\ d_Y(f(x), y) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Def. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ esp. métricas

$f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$. Dizemos que

f é contínua em x_0 se

dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$:

$$\left[x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \right.$$

$$\lfloor d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0))$$

Def. $f: X \rightarrow Y$ é contínua em X
se for contínua em cada ponto
de X .

Obs: Suponha que $x_0 \in X$
seja um ponto isolado de X ,
isto é, que exista $\rho > 0: B_\rho(x_0) = \{x_0\}$
Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função
qualquer então f é contínua
em $\{x_0\}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$
tome $\delta = \rho$. Se

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow$$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon.$$

Em particular, se d_X é a métrica discreta, então toda função $f: X \rightarrow Y$ é contínua.

Teorema: $(X, d_X), (Y, d_Y), x_0 \in X,$
 $f: X \rightarrow Y$. Então f é contínua
em $x_0 \iff$

$$\left[\begin{array}{l} \forall \{x_n\} \text{ sequência em } X, \\ x_n \xrightarrow{X} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x_0) \end{array} \right]$$

Dem. $\implies$ Seja $\varepsilon > 0$. Existe
 $\delta > 0$ tal $d_X(x, x_0) < \delta \implies$
 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Como

$x_n \xrightarrow{X} x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
 $n > n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta$.

Mas então

$n > n_0 \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$
e $\therefore f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Suponha que f não seja
contínua em x_0 . Logo $\exists \varepsilon > 0$
tal que qualquer que seja $\delta > 0$
existe $x_\delta \in B_\delta^X(x_0)$ tal que
 $f(x_\delta) \notin B_\varepsilon^Y(f(x_0))$.

Fixamos $\varepsilon > 0$ e tomamos $\delta = \frac{1}{n}$

Existirá $x_n \in B_{1/n}^X(x_0)$ t.q.
para cada n ,

$f(x_n) \notin B_\varepsilon^Y(f(x_0))$. Temos
então uma sequência $\{x_n\}$
em X tal que $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$
[em particular, $x_n \xrightarrow{X} x_0$]
e tal que $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$.
Como então $f(x_n) \not\xrightarrow{Y} f(x_0)$
obtemos a contradição
necessária $\square$

Teorema: $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$
espaços métricos. Sejam $f: X \rightarrow Y$,
 $g: Y \rightarrow Z$, $x_0 \in X$. Se f é contí-
nua em x_0 e g é contínua em
 $f(x_0)$ então

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$p/x \in X$$

é contínua em x_0 .

Dem. Seja $\{x_m\}$ em X ,

$x_m \xrightarrow{X} x_0$. Como f é contínua

em x_0 então $f(x_m) \xrightarrow{Y} f(x_0)$

Como g é contínua em $f(x_0)$,

$$g(f(x_m)) \xrightarrow{Z} g(f(x_0)), \text{ ie,}$$

$$(g \circ f)(x_m) \xrightarrow{Z} (g \circ f)(x_0)$$

Portanto $g \circ f$ é contínua em x_0 .

Suponhamos, agora, $Y = \mathbb{R}$,
com a métrica usual. Dadas,
 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ $[(X, dx) : \text{esp. métrica}]$

podemos definir $f+g$, $f \cdot g$, f/g
como sendo:

$$\left[\begin{array}{l} f+g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \\ f/g: E \rightarrow \mathbb{R} \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x) \end{array} \right.$$

onde $E = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$

Teorema: Se f e g são contínuas em $x_0 \in X$ o mesmo é verdade para $f+g$ e $f \cdot g$.
Se, também, $g(x_0) \neq 0$ então f/g é contínua em x_0 .

Dem. • $f+g$ é contínua em x_0
De fato, seja $\{x_n\}$ em X

$x_n \xrightarrow{x} x_0$. Como f e g são contínuas em x_0 ,

$$f(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x_0), \quad g(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} g(x_0)$$

$$\text{Logo } f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x_0) + g(x_0)$$

$$\text{e assim } \begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ (f+g)(x_n) & \xrightarrow{\mathbb{R}} & (f+g)(x_0) \\ f+g & \text{é contínua} & \end{matrix}$$

em x_0 $\square$

$Y = \mathbb{R}^N$ com a métrica usual

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^N \quad [(X, d_X): \text{esp. metr}]$$

Para cada $x \in X$,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$$

onde $f_j: X \rightarrow \mathbb{R} \quad j=1, \dots, N$
 f_j : componentes de f .

em $\mathbb{R}^N$ temos as projeções
 $\Pi_j: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \Pi_j(x_1, \dots, x_N) = x_j$
 $j=1, \dots, N.$

Então $f_j = \Pi_j \circ f$

Teorema: $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ é contínua em x_0 se, e só se, cada componente f_j é contínua em x_0 , $j=1, \dots, N$

Dem. Se $\{x_n\}$ é uma sequência em X , $x_n \xrightarrow{X} x_0$

$$\text{então } f(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^N} f(x_0) \Leftrightarrow \\ f_j(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_j(x_0), \forall j=1, \dots, N.$$

$$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f+g: X \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\lambda f: X \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Teorema : Se f e g são contínuas em $x_0 \in X$ o mesmo é verdade para $f+g$, $f \cdot g$ e λf .

Dem. Seja $x_n \xrightarrow{X} x_0$.

Então $f(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}^N} f(x_0)$ e $g(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}^N} g(x_0)$. Sejam

$f_j, g_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ as componentes de f e g respectivamente.

$$f_j(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_j(x_0), g_j(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} g_j(x_0)$$

$\forall j = 1, \dots, N$. Logo

$$f_j(x_m) + g_j(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_j(x_0) + g_j(x_0)$$

$\forall j = 1, \dots, n$. Logo

$$f(x_m) + g(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}^N} f(x_0) + g(x_0)$$

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ (f+g)(x_m) & \xrightarrow{\mathbb{R}^N} & (f+g)(x_0) \end{matrix}$$

Logo $f+g$ é contínua.

Obs. $(f \cdot g)(x) = \sum_{j=1}^N f_j(x) g_j(x)$
