Proposição: (X,d) esp. métrico, $F \subset X$.
Então F é fechado em X $\iff$
$\left(\forall \{x_n\} \text{ seq. em } F,\ x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow x \in F\right)$

Dem. $\Longrightarrow$ Suponha que F seja fechado em X e que $\{x_n\}$, seq. em F, $x_n \xrightarrow{X} x$. Temos que mostrar que $x \in F$. Para isto, basta mostrar que $x \in \overline{F}$, ie, basta mostrar que:

$\forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset$

Mas dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0$ $\Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Então, se $n \geq n_0$ $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap F$ e, em particular, $B_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset$

$\Longleftarrow$ Seja $x \in \overline{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$B_{1/n}(x) \cap F \neq \emptyset$

Tomo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_{1/n}(x) \cap F$

Temos, então, definida uma sequência $\{x_n\}$ em F. Mais ainda,

$$d(x_n, x) < 1/n,$$

donde $x_n \xrightarrow{X} x$. Por hipótese $x \in F$ e $\therefore$ $\overline{F} \subset F$, ie, $F = \overline{F}$ $\boxed{\text{///}}$

<u>Corolário</u> (X, d) completo, $Y \subset X$ fechado em X. Então (Y, d_Y) é completo.

<u>Dem.</u> Seja $\{y_n\}$ uma sequência de Cauchy em Y. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $m, n \geq n_0 \Longrightarrow \underbrace{d_Y(y_m, y_n)}_{= d(y_m, y_n)} < \varepsilon$

Logo $\{y_m\}$ é Cauchy em X. Como X é completo, $\exists\, y \in X$: $y_m \xrightarrow{X} y$

Mas, como Y é fechado, $y \in Y$ ie, $y_m \xrightarrow{Y} y$ e, $\therefore$, Y é completo $\boxed{\text{///}}$

Corolário: Seja $K \subset \mathbb{R}^N$. Então

K é compacto $\iff$

$$* \begin{cases} \forall \{x_n\} \text{ sequência em } K, \\ \text{existe } \{x_{n_k}\} \text{ que converge em } K. \end{cases}$$

Dem. $\implies$ vale para qualquer espaço métrico compacto

$\impliedby$ Temos que mostrar que $*$ implica que K é fechado em $\mathbb{R}^N$ e limitado

- K é limitado. Suponha que não. Então, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$K \not\subset B_n[0].$$

ie, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, $|x_n| > n$

Se $\{x_{n_k}\}$ é uma subsequência

de $\{x_n\}$ então $|x_{n_k}| > n_k$ $(\nearrow \infty)$.

Logo $\{x_{n_k}\}$ não é limitada e $\therefore$ não pode ser convergente $\}$

- K é fechado em $\mathbb{R}^N$.

Seja $\{x_n\}$ seq. em K, $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x$.

Por $*$ $\exists \{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \xrightarrow{K} y \, (\in K)$

Mas $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x$ então $x_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x$

e $x_{n_k} \xrightarrow{K} y$ então $x_{n_k} \xrightarrow{\mathbb{R}^N} y$.

Logo $x = y \in K$. $\boxed{///}$

<u>Sequências em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^N$</u>

<u>Teorema</u>: Sejam $\{s_n\}$, $\{r_n\}$ sequências em $\mathbb{R}$, $s_n \to s$, $r_n \to r$

Então:

(1) $r_n + s_n \longrightarrow r + s$

(2) $r_n s_n \longrightarrow rs$

(3) Se $r \neq 0$ então existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$

$n \geq \bar{n} \Longrightarrow r_n \neq 0$

e $\{1/r_n\}_{n \geq \bar{n}}$ converge p/ $1/r$

<u>Dem</u>. (1) Seja $\varepsilon > 0$.

Existe n_1: $n \geq n_1 \Longrightarrow |r_n - r| < \varepsilon/2$

Existe n_2: $n \geq n_2 \Longrightarrow |s_n - s| < \varepsilon/2$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |(r_n + s_n) - (r + s)| \leq$$

$$|r_n - r| + |s_n - s| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2) Como $\{r_n\}$ é convergente então $\{r_n\}$ é limitada e portanto existe $M > 0$: $|r_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Agora

$$|r_n s_n - rs| = |r_n s_n - r s_n + r s_n - rs|$$

$$= |r_n||s_n - s| + |s||r_n - r|$$

$$\leq M|s_n - s| + |s||r_n - r|$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Existe n_1 : $n \geq n_1 \Rightarrow |s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Existe n_2 : $n \geq n_2 \Longrightarrow$

$$|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2(|s|+1)}$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Se $n \geq n_0$ então

$$|r_n s_n - rs| \leq M|s_n - s| + |s||r_n - r|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|s|}{|s|+1}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(3) $r_n \xrightarrow{\mathbb{R}} r$, $r \neq 0$. Então existe $\rho > 0$ t.q. $]r-\rho, r+\rho[\not\ni 0$

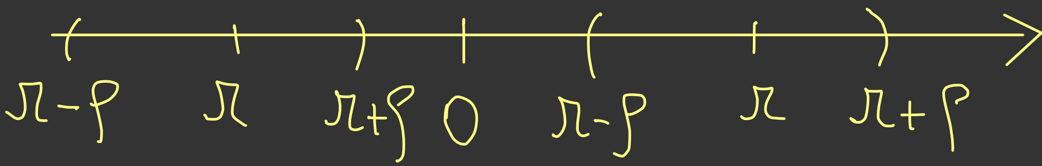
Mas existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq \bar{n} \Longrightarrow r_n \in]r-\rho, r+\rho[$$

Em particular, $r_n \neq 0$ se $n \geq \bar{n}$

Temos

$$\left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r}\right| = \frac{|r_n - r|}{|r_n||r|}$$



$$r > 0 \implies r_n > r - \rho \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$r < 0 \implies r_n < r + \rho \quad \forall n \geq \vec{n}$$

ie, $-r_n > -r - \rho \,, \; \forall n \geq \bar{n}$

$$\forall r \neq 0, \quad |r_n| > |r| - \rho, \; \forall n \geq \bar{n}.$$

$$\Big[\; |r_n| = |r + (r_n - r)| \geq |r| - |r_n - r| \geq |r| - \rho \;\Big]$$

Logo $$\left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r} \right| = \frac{|r_n - r|}{|r_n|\,|r|} < |r_n - r| \, \frac{1}{(|r|-\rho)\,|r|}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \implies |r_n - r| < \varepsilon r (r - \rho)$$

Logo, se $n \geq n_0$, $n \geq \bar{n}$ então

$$\left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r} \right| < \varepsilon$$

<u>Teorema</u>: Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^N$ e seja $x \in \mathbb{R}^N$. Para cada n, escreva

$$x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(N)})$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$$

Então $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x \iff x_n^{(j)} \xrightarrow{\mathbb{R}} x^{(j)}$, $\forall j = 1, \dots, N$

Dem: Suponha $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x$

[lembrar que, se $y \in \mathbb{R}^N$,

$y = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)})$, então

$|y^{(j)}| \leq |y|, \forall j = 1, \dots, N$, pois

$|y|^2 = \sum_{j=1}^{N} (y^{(j)})^2$]. Então

$$|y_n^{(j)} - y^{(j)}| \leq |y_n - y|$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0$

$$|y_n - y| < \varepsilon$$

e $\therefore$ $|y_n^{(j)} - y^{(j)}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$j = 1, \dots, N$

Suponha agora que $x_n^{(j)} \to x^{(j)}$ para todo $j = 1, \dots, N$.

Dado $\varepsilon > 0$, p/ cada $j = 1, \dots, N$ existe $n_0^{(j)} \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0^{(j)} \Rightarrow$

$$|x_n^{(j)} - x^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{\square} \qquad \square = \sqrt{N}$$

Tome $n_0 = \max\{n_0^{(1)}, \dots, n_0^{(N)}\}$

Se $n \geq n_0$

$$|x_n - x|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(x_n^{(j)} - x^{(j)}\right)^2$$

$$< \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^2}{\square^2} = N \frac{\varepsilon^2}{\square^2}$$