$\{x_n\}$ sequência em X

<u>Subsequência</u> de $\{x_n\}$: $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots\ldots$

Temos $n_k - n_{k-1} \geq 1 \Rightarrow n_k - n_1 \geq k-1$

<u>Logo</u>: dado $M>0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq M$

<u>Proposição</u>: (X,d) espaço métrico, $\{x_n\}$ em X, $x_n \xrightarrow{X} x$. Então dada qualquer $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \xrightarrow{X} x$.

<u>Dem.</u> Seja $\varepsilon>0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

Agora, se $\{x_{n_k}\}$ é uma subsequência de $\{x_n\}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$: $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_0$

Então $k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, ie, $x_{n_k} \xrightarrow{X} x$ ▨

<u>Prop.</u> (X,d) esp. métrico, $\{x_n\}$ sequência em X. Seja

$$E = \{x \in X : \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x\}$$

Então E é fechado em X.

<u>Dem</u>. Temos que mostrar que $E' \subset E$.

Se E' é vazio nada temos a fazer.

Vamos assumir $E' \neq \emptyset$. Em particular E é infinito. Seja $y \in E'$.

Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_{n_1} \neq y$.

Suponha que já determinamos

$n_1 < n_2 < \dots < n_{i-1}$ com: $d(x_{n_j}, y) \leq \frac{\delta}{2^{j-1}}$

para $j = 1, \dots, i-1$, onde $\underset{>0}{\delta = d(x_{n_1}, y)}$.

Precisamos determinar n_i.

Como $y \in E'$, $\exists z \in E \cap \dot{B}_{\delta/2^i}(y)$

Agora existe uma subseq. de $\{x_n\}$ convergindo p/ z!

Existe $n_i > n_{i-1}$: $d(x_{n_i}, z) < \frac{\delta}{2^i}$

Logo

$$d(x_{n_i}, y) \leq d(x_{n_i}, z) + d(z, y) \leq \delta/2^i + \delta/2^i = \delta/2^{i-1}.$$

Conclusão: $\exists\, n_1 < n_2 < \dots < n_i < n_{i+1} < \dots$ t.q. $d(x_{n_i}, y) \leq \delta/2^{i-1}, \forall i \geq 1$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}: i \geq i_0 \Rightarrow \dfrac{\delta}{2^{i-1}} < \varepsilon$

e $\therefore$ $i \geq i_0 \Rightarrow d(x_{n_i}, y) < \varepsilon$.

Assim $y \in E$ $\boxtimes$

<u>Def</u>. (X, d): espaço métrico, $\{x_n\}$ uma sequência em X. Dizemos que $\{x_n\}$ é <u>de Cauchy</u> se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

<u>Def</u>. (X, d) espaço métrico. Dizemos que (X, d) é <u>completo</u> se toda sequência de Cauchy em X é <u>convergente</u>.

<u>Teorema</u>: 1) Toda sequência convergente é de Cauchy.

2) Toda sequência de Cauchy é limitada.

3) Se $\{x_n\}$ é de Cauchy e admite uma subsequência convergente então $\{x_n\}$ é convergente.

Dem. 1) Suponha que $x_n \xrightarrow{\times} x$.

Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon/2$$

Logo, se $m, n \geq n_0$ temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy.

Existe $N \in \mathbb{N}$: $d(x_m, x_N) \leq 1$, $\forall m \geq N$. Considere

$$\rho \doteq \max\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N), 1\}$$

Então $d(x_m, x_N) \leq \rho$, $\underline{\forall m \geq 1}$

Assim, se $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_N) + d(x_N, x_n)$$
$$\leq \rho + \rho = 2\rho$$

Logo $\{d(x_m, x_n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ admite 2ρ como limitante superior e portanto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X.

3) $\{x_n\}$ Cauchy; $\exists \{x_{n_k}\}$ convergente ie, $x_{n_k} \xrightarrow{X} x$. Vamos provar que $x_n \xrightarrow{X} x$.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

- $m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

- $k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Existe $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq k_0$ t.q. $n_{k_1} \geq n_0$

Logo, se $m \geq n_0$

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_{n_{k_1}}) + d(x_{n_{k_1}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Sequências e compacidade.

Teorema. (X, d) espaço métrico compacto, $E \subset X$ infinito. Então $E' \neq \emptyset$

Dem. Suponha que $E' = \emptyset$.

Logo, se $x \in X$, $\exists r_x > 0$:

$$\dot{B}_{r_x}(x) \cap E = \emptyset$$

ou

$$B_{r_x}(x) \cap E \subset \{x\}$$

Mas $X = \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$ e $\therefore$

existem $x_1, \ldots, x_p \in X$ t.q.

$$X = \bigcup_{j=1}^{p} B_{r_{x_j}}(x_j)$$

Então

$$E = X \cap E = \bigcup_{j=1}^{p} \{B_{r_{x_j}}(x_j) \cap E\}$$

$$\subset \{x_1, \dots, x_p\} ?$$

<u>Teorema</u> <u>de</u> <u>Weierstrass</u>: Se $E \subset \mathbb{R}^N$ limitado e infinito então $E' \neq \emptyset$

<u>Dem</u>. E limitado $\Rightarrow \exists\, I \subset \mathbb{R}^N$ "intervalo" t.q. $E \subset I$. Mas, por Heine-Borel, I é compacto.

<u>Corolário 1</u>: (X, d) compacto, $\{x_n\}$ uma sequência em X. Então $\{x_n\}$ admite subsequência convergente. Em particular X é completo.

Demonstração: Seja $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

a) E é finito. Então existem $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n_k} = x_m, \forall k$.

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{a_1, \dots, a_p\}$ (sobre)

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{p} f^{-1}\{a_j\}$$

Logo $x_{n_k} \to x_m$

b) E é infinito. Neste caso $E' \neq \emptyset$. Seja $x \in E'$. Escolho $n_1 : d(x_{n_1}, x) < 1$. Suponha $x_{n_1}, \dots, x_{n_{i-1}}$ já definidos, com $n_1 < n_2 < \dots < n_{i-1}$ e $d(x_{n_j}, x) < 1/j$. Vamos definir x_{n_i}. Agora $\dot{B}_{1/i}(x)$

contém infinitos pontos da sequência. Logo existe $n_i > n_{i-1}$ t.q. $d(x_{n_i}, x) < 1/i$. Construímos então $\{x_{n_i}\}_{i \in I}$ t.q. $x_{n_i} \longrightarrow x$.

Corolário 2: $\mathbb{R}^N$ é completo.

Dem. Seja $\{x_n\}$ Cauchy em $\mathbb{R}^N$. Então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(= E)$ é limitado e portanto $\exists I$ "intervalo" t.q. $E \subseteq I$. Como I é compacto, $\{x_n\}$ tem subsequência convergente. Logo $\{x_n\}$ é convergente.