Sequências em espaços métricos

Obs: Se X é um conjunto uma sequência em X é uma função $f: \mathbb{N} \to X$. Notação: $f(n) = x_n$

f é denotada por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n\}$

Imagem de f = imagem da sequência: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$

Definição: Sejam (X, d) um espaço métrico, $\{x_n\}$ uma sequência em X, $y \in X$. Dizemos que $\{x_n\}$ converge para y (em X), e escrevemos $x_n \to y$ (ou $x_n \xrightarrow{X} y$) se vale:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, y) < \varepsilon$$

<u>Exemplo</u>:

1) $x_n = 1/n$, $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge para 0 em $\mathbb{R}$. De fato

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$

Logo, se $n \geq n_0$

$$0 < 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon.$$

2) $\{1/n\}$ é uma sequência em $]0,1]$ $(= X)$. $\{1/n\}$ não converge em X.

<u>Proposição</u>: Sejam (X, d) um espaço métrico e $\{x_n\}$ uma sequência em X

(a) Se $x_n \xrightarrow{X} y$ e $x_n \xrightarrow{X} z$ então $y = z$

(b) Se $\{x_n\}$ converge em X então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X.

(c) Se $Y \subset X$ e se $y \in Y'$ então existe $\{x_n\}$, com cada $x_n \in Y$, $x_n \xrightarrow{X} y$

Demonstrações:

(a) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como $x_n \xrightarrow{X} y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, y) < \varepsilon/2$$

Como $x_n \xrightarrow{X} z$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$n \geq n_1 \Longrightarrow d(x_n, z) < \varepsilon/2$

Seja $m \geq \max\{n_0, n_1\}$.

Logo,

$$d(y,z) \leq d(y, x_m) + d(x_m, z)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Concluímos: $\forall \varepsilon > 0$, $d(y,z) < \varepsilon$

e $\therefore$ $d(y,z) = 0$, i.e., $y = z$.

<u>Observação</u>: Como o limite de uma sequência convergente é único, podemos dizer: y é o limite de $\{x_n\}$

(b) Seja y o limite de $\{x_n\}$

Logo existe $N \in \mathbb{N}$:

$n \geq N \implies d(x_n, y) \leq 1$

Seja

$$M = \max\{d(x_1, y), \ldots, d(x_{N-1}, y), 1\}$$

Logo $d(x_n, y) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

e portanto, se $n, m \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, y) + d(y, x_m)$$
$$\leq 2M$$

$\implies 2M$ é limitante superior de $\{d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\}$

(c) $Y \subset X$, $y \in Y'$. Por definição de ponto de acumulação

$$\forall r > 0, \ \dot{B}(y, r) \cap Y \neq \emptyset$$

Tomo $r = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\forall n \quad \dot{B}(y, 1/n) \cap Y \neq \emptyset$

Tomo $x_n \in Y \cap \dot{B}(y, 1/n)$

Obtemos uma sequência em Y, $\{x_n\}$, com

$$d(x_n, y) < 1/n$$

Então $x_n \xrightarrow{X} y$ pois dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow 1/n < \varepsilon$

e portanto $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, y) < \varepsilon$

<u>Subsequências</u>: X conjunto. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X

Dada uma sequência de naturais

$1 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k < p_{k+1} < \dots$

a <u>sequência</u> $(x_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ denomina-se "<u>subsequência de</u> $\{x_n\}$"

$f : \mathbb{N} \longrightarrow X \qquad x_n = f(n)$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad p_k = g(k)$

"<u>crescente</u>"

a subsequência é dada

por $f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow X$

$f(g(k)) = x_{p_k}$
