DINÂMICA DOS GRUPOS FUCHSIANOS

Resumo. Iniciaremos com o estudo de propriedades básicas das transformações de Möbius e do plano hiperbólico $\mathbb{H}^+$. Então consideraremos os grupos Fuchsianos visando descrever os seus conjuntos limite e domínios fundamentais. Sempre que possível procuraremos visualizar através de programas computacionais os resutados que obtivermos. Em uma segunda parte do projeto (segundo ano) deveremos explorar as interligações deste assunto com a teoria da relatividade em física, incluindo em particular, o estudo das relações entre as transformações de Möbius e as transformações de Lorentz do espaço-tempo bem como o estudo dos grupos Fuchsianos derivados de álgebras quaterniônicas.

O presente projeto envolve várias áreas da matemática e da física dando-lhe um bonito caráter interdisciplinar. Ao mesmo tempo possui uma literatura muito bem desenvolvida que facilitará em muito o desenvolvimento e o sucesso do mesmo. Mencionamos em particular o excelente livro "Fuchsians Groups"de S. Katok [Kat92] que em pouco mais de 100 páginas contém quase toda a teoria que pretendemos desenvolver neste primeiro ano de projeto. Outros exemplos de bibliografia que utilizaremos são [Nee96] para geometria hiperbólica, [Ahl66] para propriedades basicas de funções analiticas e especialmente transformações de Möbius, [Nee97] para aspectos mais dinâmicos e classificação das transformações de Möbius e [Sha06] para transformações de Möbius e programas computacionais com Mathematica.

Em seguida introduziremos alguns conceitos básicos e mencionaremos de forma mais específica alguns fatos que estaremos abordando no presente projeto.

Transformações de Möbius. Uma transformação de Möbius é uma função $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ ,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ são tais que $ad - bc \neq 0$. As transformações de Möbius podem possuir 1 ou 2 pontos fixos em $\overline{\mathbb{C}}$ sendo chamadas então, respectivamente, *parabólica* ou *loxodrômica*. As loxodrômicas se subdivem nas *hiperbólicas* e nas *elípticas* dependendo do tipo de seus pontos fixos. Dentre as propriedades que verificaremos estão os fatos de que as transformações de Möbius preservam a família dos círculos de $\overline{\mathbb{C}}$, preservam a razão cruzada de 4 pontos e possuem derivada de Schwarz nula.

Plano hiperbólico. O *plano hiperbólico* como de costume é o semi-plano superior

$$\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

munido da métrica hiperbólica dada por

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \,.$$

Abordaremos aspectos geométricos do plano hiperbólico incluindo por exemplo a identificação de suas geodésicas, ou seja, das curvas que minimizam a distância hiperbólica em $\mathbb{H}^+$. Em seguida veremos que

$$PSL(2,\mathbb{R}) := \{z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : \text{ onde } \; a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1\},$$

com a operação de composição, é um grupo álgébrico cujos elementos são as isometrias de $\mathbb{H}^+$ que preservam orientação.

Grupos Fuchsianos. Os *grupos Fuchsianos* são por definição subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$. Aqui nós dizemos que um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ é *discreto* se para toda sequência T_n em Γ tem-se que $T_n \to T$ quando $n \to \infty$ (no sentido em que a 4-upla dos coeficientes de T_n dada por (a_n, b_n, c_n, d_n) e $(1,0,0,1)$ se aproximam na métrica euclideana de $\mathbb{R}^4$ quando $n \to \infty$) então $T_n = T$ apartir de algum n_0. Um exemplo importante de grupo Fuchsiano é o *grupo modular*

$$PSL(2,\mathbb{Z}) = \{z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : \text{ onde } \; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1\}.$$

Os grupos Fuchsianos $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ são *propriamente descontínuo* o que significa que todo $z \in \mathbb{H}^+$ possui uma vizinhança V tal que $V \cap T(V) \neq \emptyset$ ocorre somente para um número finito de transformações $T \in \Gamma$. A recíproca deste fato também é válida, todo subgrupo de $PSL(2,\mathbb{R})$ propriamente descontínuo é um grupo Fuchsiano.

Dado um grupo Fuchsiano Γ a *órbita* de $z \in \mathbb{H}^+$ é o conjunto dada por

$$\Gamma(z) = \{T(z) : \text{ onde } \; T \in \Gamma\}.$$

O conjunto $\Lambda(\Gamma)$ de todos os pontos de acumulação de $\Gamma(z)$, para todo $z \in \mathbb{H}^+$, chama-se *conjunto limite* de Γ. Como um grupo Fuchsiano Γ é propriamente descontínuo as suas órbitas são conjuntos discretos de $\mathbb{H}^+$ e portanto $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. As propriedades topológicas, métricas e geométricas de $\Lambda(\Gamma)$ são de crucial relevância para a compreenção da dinâmica do grupo. Dentre outras propriedades veremos que no caso em que $\Lambda(\Gamma)$ contém mais do que 1 ponto ele é o fecho do conjunto dos pontos fixos das transformações T, hiperbólicas, que estão em Γ. No caso em que $\Lambda(\Gamma)$ contém mais do que 2 pontos então $\Lambda(\Gamma)$ é igual a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ou é um conjunto perfeito de interior vázio. Neste primeiro caso o grupo é dito de *primeira classe* e no segundo caso é dito de *segunda classe.*

Domínios Fundamentais. Uma região fechada $R \subset \mathbb{H}^+$ é dita *domínio fundamental* de um grupo Fuchsiano Γ se cada órbita intersepta pelo menos uma vez esta região e o interior de R, denotado por $Int(R)$, é tal que $Int(R) \cap T(Int(R)) = \emptyset$ para todo $T \in \Gamma$ distinto da identidade. A órbita de um domínio fundamental de Γ ladrilha $\mathbb{H}^+$ e serve para descrever o espaço das órbitas do grupo que em geral, com as identificações do bordo adequadas, é uma superfície de Riemann recoberta por $\mathbb{H}^+$ e tendo Γ como o grupo das transformações de recobrimento.

Um exemplo de um interessante fato que relaciona uma propriedade geométrica a uma propriedade dinâmica é o que garante que se Γ possui um domínio fundamental com área hiperbólica finita então ele é de primeira classe.

Cronograma. No primeiro ano do projeto pretendemos desenvolver os tópicos mencionados acima dedicando 4 meses para o estudo dos aspectos básicos de transformações de Möbius e do plano hiperbólico, 3 meses para uma introdução às propriedades mais gerais dos grupos Fuchsianos, 4 meses para o estudo dos conjuntos limite e domínios fundamentais de um grupo Fuchsiano e por fim deveremos fazer uma revisão de tudo no 12º mês. Em segundo ano do projeto planejamos estudar as relações entre o assunto desenvolvido aqui e a teoria da relatividade em física.

Referências

[Ahl66] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis: An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable.* Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.

[Nee96] João L. Needham. *Geometria hiperbólica.* 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, SBM, 1996.

[Nee97] Tristan Needham. *Visual complex analysis.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997.

[Sha06] William T. Shaw. *Complex analysis with Mathematica®.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).