Comportamentos dinâmicos em dimensão 1 e seus parâmetros em famílias específicas

January 26, 2007

O projeto atual visa proporcionar ao candidato os primeiros contatos com questões e técnicas da área de sistemas dinâmicos, explorar aspectos numéricos e possíveis aplicações. Trataremos de dinâmicas em dimensão 1 (aplicações do círculo e do intervalo) e eventualmente algumas relações com dinâmicas em dimensões maiores. Dizendo de uma forma breve o livro de W. de Melo e S. van Strien [1] é uma boa referência para para maior parte do assunto que abordaremos aqui. Muitas outras referências, principalmente para a parte mais aplicada, serão pesquisadas e esta pesquisa faz parte do trabalho do candidato. Mencionamos abaixo algumas situações concretas que abordaremos:

Homeomorfismos do círculo (1 semestre). Os difeomorfismos mais simples do círculo $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são as rotações, a saber, os difeomorfismos r_ρ induzidos por $R_\rho(x) = x + \rho, \quad x \in \mathbb{R}$. Na descrição da dinâmica de um homeomorfismo f do círculo os conceitos de número de rotação e intervalos errantes são fundamentais. Quando f inverte orientação a sua dinâmica é muito simples. Quando f preserva orientação todas as órbitas estão ordenadas do mesmo modo no círculo. Então define-se o número de rotação $\rho = \rho(f)$ e se este é racional a dinâmica de f também é muito simples. No caso em que ρ é irracional f é semi-conjugado à rotação r_ρ. A classe de diferenciabilidade ou a presença e natureza de pontos críticos para f tem grande influência na regularidade desta semi-conjugação, digamos h. Aqui estaremos especialmente interessados na injetividade de h, isto depende da não-existência de intervalos errantes.

1. Os conceitos de número de rotação e intervalos errantes.

2. Construção de difeomorfismos de Classe C^1 que exibem intervalos errantes.

3. A não-existência de intervalos errantes para difeomorfismos de classe C^2.

4. Construção de homeomorfismos de classe C^∞ com um único ponto crítico e que exibem intervalos errantes.

5. A não-existência de intervalos errantes para os homeomorfismos f_a, de classe C^∞ e que exibem um ponto crítico, induzidos por

$$F_a(x) = x + a + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x), \quad 0 \leq a < 1.$$

6. Renormalização.

7. Determinação numérica do parâmetro a para o qual o homeomorfismo f_a (do ítem anterior) exibe um número de rotação dado previamente. O caso do número de ouro e outros.

8. Algumas aplicações práticas.

Aplicações tendas (2 semestre). Dizemos que uma aplicação contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ é *unimodal* se existe $c \in (0,1)$ tal que f é crescente em $[0,c]$ e decrescente em $[c,1]$. O ponto c é chamado *ponto de dobra* é o comportamento da sua órbita juntamente com a existência ou não de intervalos errantes é fundamental para a descrição da dinâmica de f. Neste contexto a interação entre o ramo $f_{|[0,c]}$ que é crescente e o ramo $f_{|[c,1]}$ que é decrescente implica que órbitas diferentes podem estar ordenadas de modo diferente no intervalo $[0,1]$ e isto acarreta uma maior riqueza da respectiva dinâmica.

Os exemplos mais simples de aplicações unimodais são as aplicações *tendas* dadas por

$$T_s(x) = \min\{2sx, 2s(1-x)\}; \quad x, s \in [0,1].$$

Neste caso o ponto de dobra é $c = \frac{1}{2}$ e para $s \in [0, \frac{1}{2}]$ a dinâmica de T_s é muito simples. Para $s > \frac{1}{2}$ temos que T_s expande comprimentos de intervalos que não contêm o ponto de dobra pelo fator $2s$. Por outro lado um intervalo que contém este ponto pode ser contraído pelo efeito de dobra associado ao mesmo. Consideraremos as seguintes questões sobre a dinâmica das aplicações tendas:

1. Seqüências de kneading.
2. O comportamento assintótico da órbita positiva do ponto de dobra.
3. A não-existência de intervalos errantes.
4. O comportamento assintótico da órbita positiva de um ponto genérico, conjuntos limites e não errantes.
5. Aplicações de primeiro retorno e a propriedade de decaimento de geometria.

6. Renormalização.

7. Determinação numérica do parâmetro s para o qual T_s exibe uma seqüência de kneading dada previamente. O caso Fibonacci e outros.

8. Algumas aplicações práticas.

Aplicações unimodais (3 semestre). Como observamos acima o comportamento assintótico da órbita positiva do ponto de dobra de uma aplicação unimodal f juntamente com a existência ou não de intervalos errantes é fundamental para a descrição da dinâmica de f. Em geral f é semi-conjugada a uma aplicação tenda mas neste caso mesmo que f não possua intervalos errantes a semi-conjugação pode não ser injetiva. Isto sempre ocorre quando f possui pontos periódicos atratores ou é semi-conjugada a uma aplicação tenda cujo ponto de dobra é periódico com período diferente de 2^n, para todo $n > 0$. Observamos também que se f é diferenciável temos uma contração muito forte próximo ao ponto de dobra e uma certa expansão longe deste. A interação entre esta contração e expansão determinam propriedades métricas desta dinâmica. Por exemplo, a questão da existência ou não de intervalos errantes depende de quão forte é a contração nas proximidades do ponto de dobra, ou seja, depende da sua ordem.

1. O comportamento assintótico da órbita positiva de um ponto genérico, conjuntos limites e não errantes.

2. Construção de aplicações unimodais de Classe C^∞ que exibem intervalos errantes.

3. A não-existência de intervalos errantes para aplicações unimodais de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa e ponto de dobra de ordem finita.

4. Renormalização e aplicações infinitamente renormalizáveis.

5. Aplicações de primeiro retorno e a propriedade de decaimento de geometria.

6. Determinação numérica do parâmetro a para o qual a aplicação quadrática $Q_a(x) = ax(1-x)$ exibe uma dada seqüência de kneading. Os casos Feigembaun-Tresser, Fibonacci e outros.

7. Algumas aplicações práticas.

Dinâmica em dimensão 2 (4 semestre). Dentre as atividades do quarto semestre gostaríamos de implementar alguns experimentos numéricos com famílias de homeomorfismos agindo no $\mathbb{R}^2$ tais como $E_{st}(x,y) = (T_s(x) + y, tx)$ e no caso da bem conhecida família de Henon $H_{ab}(x,y) = (Q_a(x) + y, bx)$, abordando neste último caso apenas algumas questões mais simples devido a complexidade do problema em geral. Podemos pensar E_{st} e H_{ab} como perturbações, respectivamente, da família das aplicações tendas e da família das aplicações quadráticas. Muitas vezes propriedades de T_s ou Q_a podem fornecer informações sobre a dinâmica de E_{st} ou de H_{ab}, respectivamente. Por exemplo, se $|DQ_a^n(\frac{a}{4})| \geq C\lambda^n$ para algum $C > 0$ e $\lambda > 1$, existe uma descrição bastante satisfatória da dinâmica de H_{ab}. Mais ambiciosamente gostaríamos de partir de uma Q_a bem conhecida (o caso em o ponto de dobra é atraído por um ponto periódico atrator por exemplo) e fazer experimentos numéricos com H_{ab}.

References

[1] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.