1ª Prova de MAT3210 - Cálculo Diferencial e Integral II

IGC- 19 /09/2019

B

Nome:	**Q**	**N**
Assinatura:	**1**	
RG:	2	
Nº USP:	**3**	
Turma: 2019216 - Teórica	**4**	
Professor: Edson Vargas	**Total**	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão: (2,5 pontos) Seja R a região do plano xy limitada por $y = x^2 - 3x + 1$ e $y = x + 1$. Ache o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Oy.

Solução. $y = x^2 - 3x + 1$ e $y = x + 1$ são iguais quando $x^2 - 4x = 0$ o que ocorre para $x = 0$ ou $x = 4$. Para $0 \leq x \leq 4$, verifica-se que $x^2 - 3x + 1 \leq x + 1$. Portanto a altura da região R é a diferença que $-x^2 + 4x$ e portanto o volume pedido é:

$$2\pi \int_0^4 x\left(-x^2 + 4x\right) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4\,x^3}{3}\right)_0^4 = \frac{4^4\,\pi}{6}$$

□

2ª Questão: (2,5 pontos) Seja R a região do plano xy limitada pela equação $\rho = 2 - \cos\theta$, dada em coordenadas polares (ρ, θ). Calcule a área de R.

Solução. A área pedida é dada pela integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - \cos\,\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\,\cos\,\theta + \cos^2\,\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\,\cos\,\theta + \frac{1 + \cos\,2\,\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\cos\,2\,\theta}{4}\right) d\theta = \frac{9\,\pi}{2}$$

□

3ª Questão: Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x-4y}$, onde $x \neq 2y$.

a) (1,5 pontos) Ache uma equação para a curva de nível de f que contem o ponto $(2,0)$ e ache outro ponto desta curva.

b) (1,5 pontos) Decida se o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x-4y}$ existe ou não. Justifique a sua resposta.

Solução.

(a) Como $f(2,0) = 1$, o ponto $(2,0)$ pertence à curva de nível 1 cuja equação pode ser escrita como $\dfrac{x^2+y^2}{4x-2y} = 1$, ou seja, $x^2+y^2 = 4x-2y$ que, completando os quadrados em x e y resulta em $(x-2)^2+(y+1)^2 = 5$. Então o gráfico da função $y = 1+\sqrt{5-(x-2)^2}$ está contido nessa curva de nível, em particular, o ponto $(1,1)$ também está nessa curva.

(b) Primeiro observamos que $f(x,y)$ tende a zero quando $x,y)$ tende a $(0,0)$ ao longo do eixo Oy, de fato: $f(0,y) = -\frac{y}{2}$ tende a zero quando y tende a zero. Por outro lado, como visto no Item (a), a curva de nível 1 da função f, tem equação $(x-2)^2+(y+1)^2 = 5$, uma circunferência que passa por $(0,0)$. Então, se (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo dessa circunferência, temos que $f(x,y) = 1$, Isto mostra que o limite pedido não existe.

$\square$

4ª Questão: (2 pontos) Considere a função $f(x,y) = (3x+\operatorname{sen} y)^5$ e calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Solução.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15\,(3x+\operatorname{sen} y)^4; \quad (0,5 \text{ pontos})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5\,(3x+\operatorname{sen} y)^4 \cos y; \quad (0,5 \text{ pontos})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5\,(3x+\operatorname{sen} y)^4 \cos\, y\right),$$

então resulta que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 20\,(3x+\operatorname{sen} y)^3 \cos^2 y - 5\,(3x+\operatorname{sen} y)^4 \operatorname{sen} y, \quad (1 \text{ ponto}).$$

$\square$