1ª Prova de MAT3210 - Cálculo Diferencial e Integral II

IGC- 19 /09/2019

A

Nome: ....

Assinatura: ....

RG: ....

Nº USP: ....

Turma: 2019216 - Teórica ....

Professor: Edson Vargas ....

Q	**N**
1	
2	
3	
4	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão: (2,5 pontos) Seja R a região do plano xy limitada por $y = x^2 - 8x - 1$ e $y = x - 1$. Ache o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Oy.

Solução. $y = x^2 - 8x - 1$ e $y = x - 1$ são iguais quando $x^2 - 9x = 0$ o que ocorre para $x = 0$ ou $x = 9$. Para $0 \leq x \leq 9$, verifica-se que $x^2 - 8x - 1 \leq x - 1$. Portanto a altura da região R é a diferença que é $-x^2 + 9x$. Logo o volume pedido é:

$$2\pi \int_0^9 x\left(-x^2 + 9x\right)\, dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{9\,x^3}{3}\right)_0^9 = \frac{9^4\,\pi}{6}$$

$\square$

2ª Questão: (2,5 pontos) Seja R a região do plano xy limitada pela equação $\rho = 2 - \operatorname{sen}\theta$, dada em coordenadas polares (ρ, θ). Calcule a área de R.

Solução. A área pedida é dada pela integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1 - \cos 2\,\theta}{2}\right)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4} - 2\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos 2\,\theta}{4}\right)\, d\theta = \frac{9\,\pi}{2}$$

$\square$

3ª Questão: Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{4x-2y}$, onde $y \neq 2x$.

a) (1,5 pontos) Ache uma equação para a curva de nível de f que contem o ponto $(0,2)$ e ache outro ponto dessa curva.

b) (1,5 pontos) Decida se o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{4x-2y}$ existe ou não. Justifique a sua resposta.

Solução.

(a) Como $f(0,2) = -1$, o ponto $(0,2)$ pertence à curva de nível -1, cuja equação pode ser escrita como $\dfrac{x^2+y^2}{4x-2y} = -1$, ou seja, $x^2+y^2 = -4x+2y$ que, completando os quadrados em x e y resulta em $(x+2)^2+(y-1)^2 = 5$. Então o gráfico da função $y = 1+\sqrt{5-(x+2)^2}$ está contido nessa curva de nível, em particular, o ponto $(-1,3)$ também está nessa curva.

(b) Primeiro observamos que $f(x,y)$ tende a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo do eixo Oy, de fato: $f(0,y) = -\dfrac{y}{2}$ tende a zero quando y tende a zero. Por outro lado, como visto no Item (a), a curva de nível -1 da função f, tem equação $(x+2)^2+(y-1)^2 = 5$, uma circunferência que passa por $(0,0)$. Então, se (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo dessa circunferência, temos que $f(x,y) = -1$. Isto mostra que o limite pedido não existe.

□

4ª Questão: (2 pontos) Considere a função $f(x,y) = (3y+\operatorname{sen} x)^5$ e calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$.

Solução.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5\,(3y+\operatorname{sen} x)^4 \cos x; \quad (0,5 \text{ pontos})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 15\,(3y+\operatorname{sen} x)^4; \quad (0,5 \text{ pontos})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5\,(3y+\operatorname{sen} x)^4 \cos x\right),$$

então resulta que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 20\,(3y+\operatorname{sen} x)^3 \cos^2 x - 5\,(3y+\operatorname{sen} x)^4 \operatorname{sen} x, \quad (1 \text{ ponto}).$$

□