1. MAT - 3210 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II – IGC
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - 2019

(1) Encontre , caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3y$.

(2) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D.
  a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
  b) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 2, \, x \leq 0, \ y \geq 0\}$
  c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$
  d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, -3 \leq x \leq 3, \ -3 \leq y \leq 3\}$.
  e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x \leq 3, \ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

(3) Seja $T(x,y) = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dê a temperatura do ponto (x,y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida, e a mínima? Justifique.

(4) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:
  a) $f(x,y) = xy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 = 1, \ x \in [1,2]\}$
  b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1, \ x \in [0, \frac{1}{4}], \, y \geq 0\}$

(5) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita à restrição explicitada:
  $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

Nos exercícios 6 e 7, explique por que o ponto encontrado é de máximo ou de mínimo.

(6) a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

  b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

(7) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

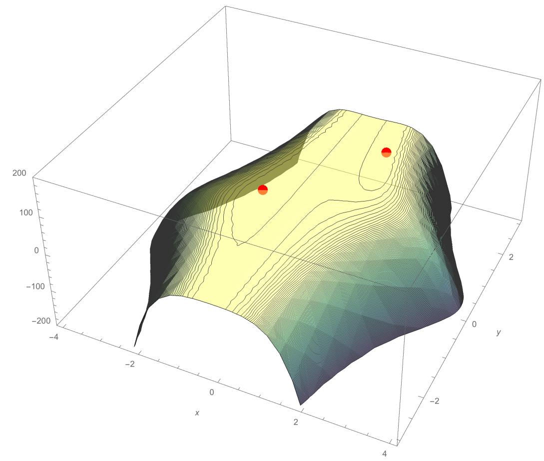
(8) Seja $f(x,y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
  a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.
  b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

(9) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:
  a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
  b) $z = x^2y^2$
  c) $z = x^3y^3$
  d) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
  e) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
  f) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

(10) Determine os valores de a para os quais a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$.

  a) Tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local.
  b) Tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
  c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
  d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

(11) É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê o mesmo pode não ocorrer com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.



(12) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

(13) Seja $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x, y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

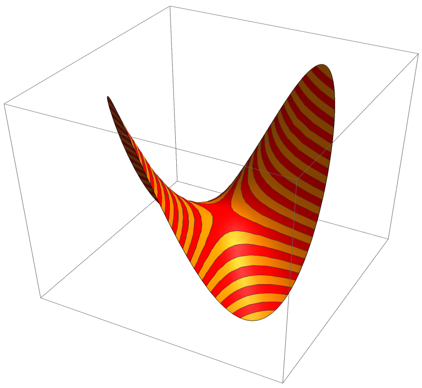
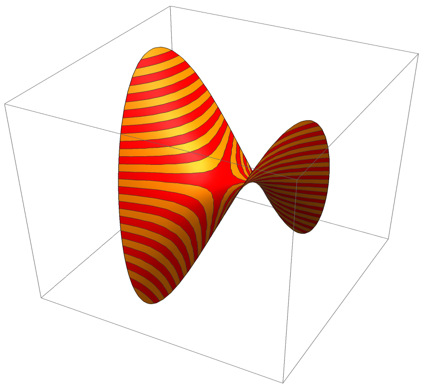
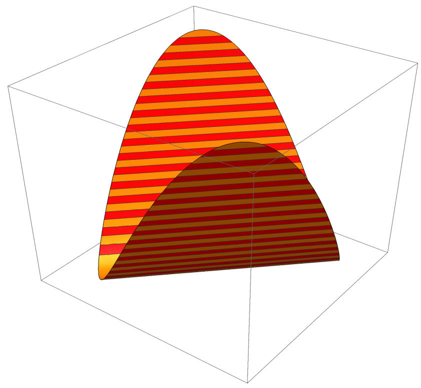
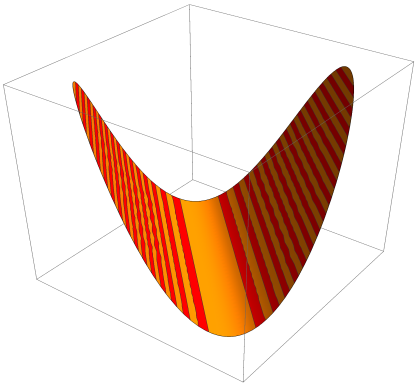
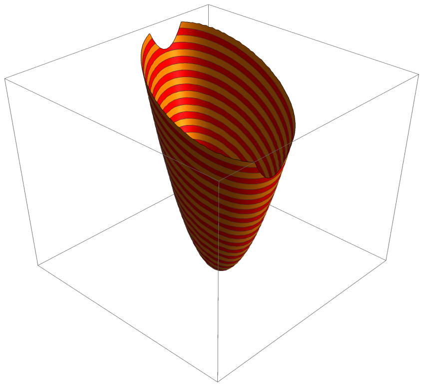
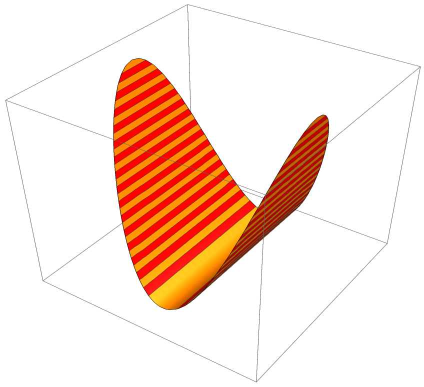
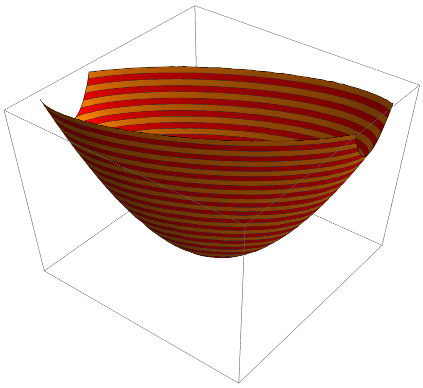
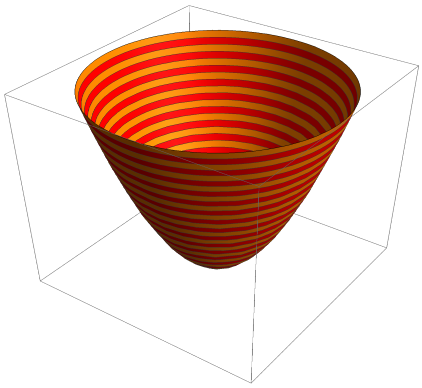
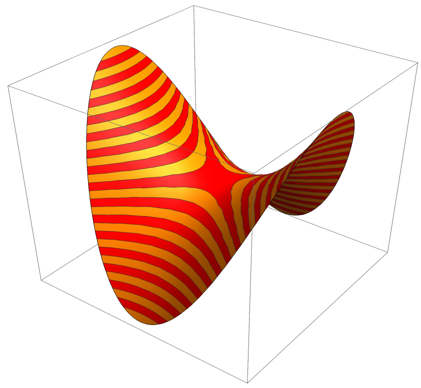
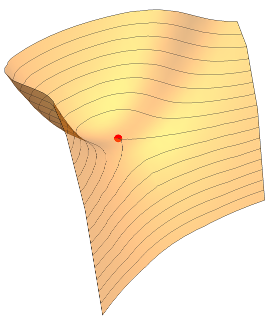
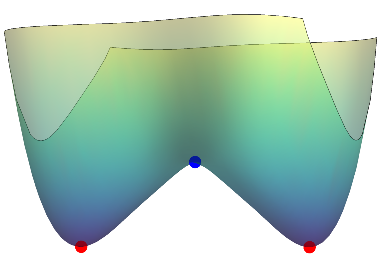
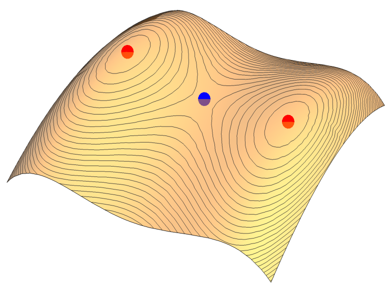
Resolva os exercícios 14 e 15, a seguir, assumindo que cada problema proposto tem solução. É possível provar que essas soluções existem?

(14) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

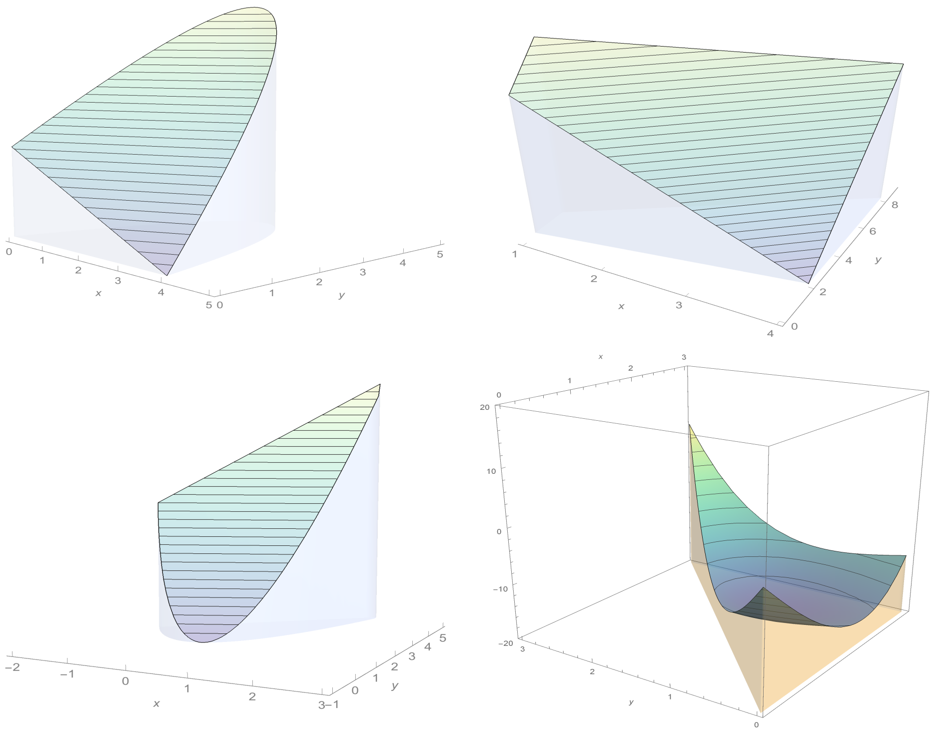
(15) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

(16) Associe às funções abaixo a um dos gráficos a seguir, indique na respectiva figura os eixos x e y, orientados. Ache os pontos críticos, classifique-os e esboce as curvas de nível de cada uma delas no plano xy.

a) $f(x, y) = -x^4 + 2x^2 - y^2 - 1$	b) $f(x, y) = x^2 + y^2$	c) $f(x, y) = x^2 - y^2$
d) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$	e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$	f) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$
g) $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$	h) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$	i) $f(x, y) = x^2 + 8xy + 2y^2$
j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 20x^2 - 10xy - 25$	k) $f(x, y) = x^2$	ℓ) $f(x, y) = -x^3 + y^2$

(17) Ache os máximos e mínimos locais (globais) de $f(x,y)$ na região D.
a) $f(x,y) = -x + 2y + 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -x^2 + 4x\}$;
b) $f(x,y) = -5x + 2y + 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x/2 \leq y \leq 2x \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$;
c) $f(x,y) = -x + 2y - 3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \leq y \leq x + 3\}$;
d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$ e $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x\}$.



(18) Sejam k um número real não-nulo e $f(x,y) = k\,x^3 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$, definida em $\mathbb{R}^2$.
a) Ache k de modo que f tenha exatamente 2 pontos críticos;
b) Classifique os dois pontos críticos de f obtidos em (a).

(19) Uma empresa tem 3 fábricas, F_1, F_2 e F_3, produzindo a mesma mercadoria. Estas fábricas produzem x_1, x_2 e x_3 unidades de mercadoria a um custo de $3x_1^2 + 200$, $x_2^2 + 400$ e $2x_3^2 + 300$ Reais, respectivamente. Para atender um pedido de 1100 unidades, como deve ser distribuída a produção entre as fábricas para minimizar o custo total de produção?

Algumas respostas

1. ptos de máx: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$; ptos de mín: $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$;

2. a) valor máx: $f(4,5) = 13$, valor mín: $f(4,0) = -7$;
   b) valor máx: $f(0,0) = 0$, valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$.
   c) valor máx: $f(1,0) = 2$, valor mín: $f(-1,0) = -2$.
   d) máximo: $f(3,-3) = 57$, mínimo: $f(-2,-1) = -7$.
   e) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. a) valor mín: $-2\sqrt{3}$ e valor máx: $2\sqrt{3}$;
   b) valor mín: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e valor máx: 1.

5. valor máx: $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; valor mín: $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$;

6. a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; b) $(0,-1,2)$.
7. $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.
9. a) pto de mín: $(-3,2)$;
   b) ptos de mín: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
   c) ptos de sela: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
   d) pto de máx:$(1,1)$, ptos de sela: $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$;
   e) pto de sela: $(0,0)$, ptos de máx: $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ptos de mín: $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
   f) pto de mín: $(\frac{1}{3},0)$.
10. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.
14. base 3×3cm, altura 1,5cm.
15. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.

2. Informações gerais

Bibliografia Sugerida

(1) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 1 cap. 13.*
(2) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 2 cap. 9 a 16.*

OU

(3) James Stewart; *Cálculo , vol. 1, cap. 6.*
(4) James Stewart; *Cálculo , vol. 2, cap. 13 e 14.*

Monitoria.

(1) Monitor: Caue Almeida Costa
(2) Email: cauecosta@usp.br
(3) Horário: Segundas e Quintas Feiras das 12h às 13h
(4) Local: Auditório A3

Avaliação -
A média final (MF1) será a média de 3 provas: $P1$, $P2$ e $P3$. Haverá uma prova substitutiva (SUB) apenas para quem deixar de fazer uma das provas $P1$, $P2$, ou $P3$. MF1 ≥ 5 e frequência $\geq 70\%$ indica aprovação, $3 \leq MF1 < 5$ e frequência $\geq 70\%$ dará direito a uma prova de recuperação (REC), MF1 < 3 ou frequência $< 70\%$ indica reprovação. Àqueles que fizerem a REC terão uma segunda média final (MF2) que será a média de MF1 e REC. MF2 ≥ 5 indica aprovação e $MF2 < 5$ indica reprovação.

Prova	**Data**
$P1$	19/09/19 e $P1'$ em 10/10/19
$P2$	21/10/19
$P3$	21/11/19
SUB	28/11/19 Fechada
REC	a ser marcada em Janeiro ou Fevereiro de 2020.

Obs. Aqueles que fizeram a $P1$ podem, opcionalmente, complementá-la com a $P1'$. No caso desse complemento a média da $P1$ passará a ser $(2P1 + P1')/3$.