MAT - 3210 - Cálculo Diferencial e Integral II - IGC
$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - 2019

1. Derivadas Parciais, Diferenciabilidade e Plano Tangente

(1) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

(2) Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

(3) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.
(b) f é contínua em (0,0)?
(c) f é diferenciável em (0,0)?

(4) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em (0,0).
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
(c) É f diferenciável em $(0,0)$?
(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

(5) Seja $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. Verifique que g é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

(6) Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

(7) Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

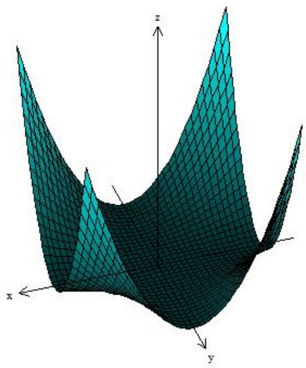
(a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \mathrm{e}^x \ln(\frac{y}{2})$, no ponto $(3,2,0)$

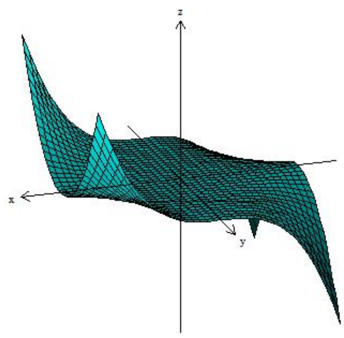
(8) Verifique que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3,4,5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

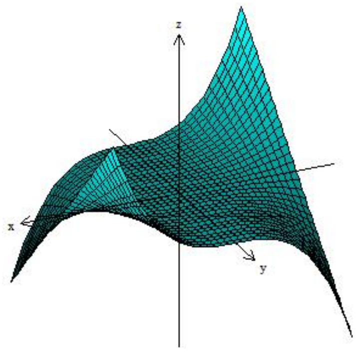
(9) Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$. Existe um só plano?

(10) Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

(11) As superfícies abaixo são os gráficos de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua resposta.







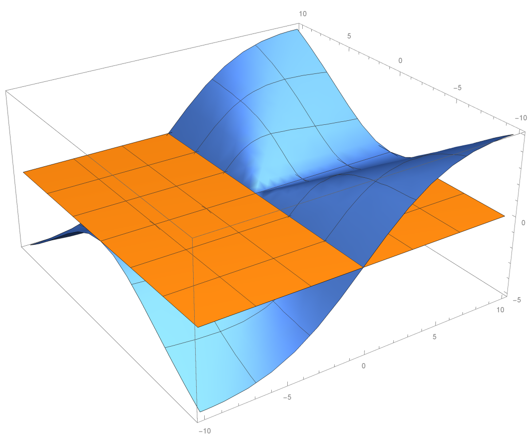
(a) (b) (c)

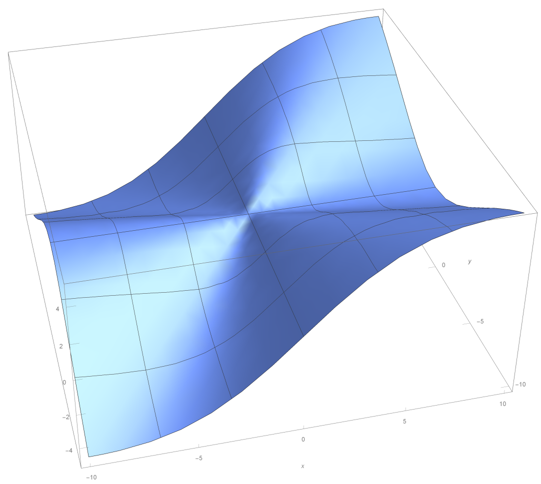
(12) A superfície abaixo e a direita mostra o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A figura a esquerda mostra este mesmo gráfico e o gráfico do plano $z = 0$.

(a) verifique que f é contínua em $(0,0)$;
(b) verifique que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem e são nulas;
(c) verique que o plano $z = 0$ não é tangente ao gráfico de f em $(0,0,0)$.





(13) Calcule o plano tangente e a reta normal ao gráfico das funções abaixo no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nos casos abaixo:
(a) $f(x,y) = (x^2y + y)^3, \quad (x_0, y_0) = (1,2)$
(b) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^4), \quad (x_0, y_0) = (1,1)$
(c) $f(x,y) = \cos(x^2y) + y, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$

(14) Para $\vec{v} = (3/5, 4/5)$, calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ para f e (x_0, y_0) nos casos do exercício 13, acima.

(15) Calcule $\vec{v}$, unitário, que maximiza a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ para f e (x_0, y_0) nos casos do exercício 13, acima.

2. Regra da Cadeia

(1) Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2$; $x = t^2 + u^2$, $y = 2tu$.

(b) $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $x = t\cos u$; $y = t\,\mathrm{sen}\,u$.

(2) Calcule a derivada da composta $f \circ \gamma$, em t_0, nos seguintes casos:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^4}$; $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t)$ e $t_0 = 0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $\gamma(t) = (t^2, (1+t)^{10})$ e $t_0 = -1$.

(3) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (k,-4)$ e $g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t)$. Determine k para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

3. Vetor Gradiente e suas aplicações

(1) Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

(2) Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

(3) O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

(4) Verifique que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

(5) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1,2)$;

(6) Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $(1,1)$.

(7) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

4. Mais Alguns Exemplos

(1) Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

(2) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

(3) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Verifique que $\dfrac{d}{dt} f(\gamma(t)) \neq \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

(4) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Verifique que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. A f é diferenciável em $(0,0)$?

Respostas – Seção 1

(1) (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^3 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-3xy^2 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$.

(2) -2 **(3)** (b) Não é contínua em (0,0) (c) Não é diferenciável em (0,0).

(4) (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não. (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

(6) (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.
(b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.
(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.
(d) O mesmo que o item (c).

(7) (a) $z = 1$ e a reta $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(b) $e^3 y - 2z - 2e^3 = 0$ e a reta $X = (3,2,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(9) $6x - y - z + 6 = 0$ (sim, só um) **(10)** $k = 8$

Respostas – Seção 2

(4) $k = 3$

Respostas – Seção 3

(1) $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

(2) $4(x-1) + 5(y-2) = 0$ e $4(x+1) + 5(y+2) = 0$.

(3) $X = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) f não é diferenciável em $(0,0)$. **(5)** (a) $\sqrt{5}$ e $(1,2)$; (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

(7) Em todos os pontos da reta $x - y + 1 = 0$.

Respostas – Seção 4

(1) A $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em (0,0), mas a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ o é.

(3) (a) $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = m^2$ (d) f não é diferenciável em $(0,0)$.

(4) f não é diferenciável em $(0,0)$.

5. INFORMAÇÕES GERAIS

Bibliografia Sugerida

(1) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 1 cap. 13.*
(2) Hamilton L. Guidorizzi; *Um Curso de Cálculo, vol. 2 cap. 9 a 16.*

OU

(3) James Stewart; *Cálculo , vol. 1, cap. 6.*
(4) James Stewart; *Cálculo , vol. 2, cap. 13 e 14.*

Monitoria.

(1) Monitor: Caue Almeida Costa
(2) Email: cauecosta@usp.br
(3) Horário: Segundas e Quintas Feiras das 12h às 13h
(4) Local: Auditório A3

Avaliação -
A média final (MF1) será a média de 3 provas: $P1$, $P2$ e $P3$. Haverá uma prova substitutiva (SUB) apenas para quem deixar de fazer uma das provas $P1$, $P2$, ou $P3$. MF1 ≥ 5 e frequência $\geq 70\%$ indica aprovação, $3 \leq MF1 < 5$ e frequência $\geq 70\%$ dará direito a uma prova de recuperação (REC), MF1 < 3 ou frequência $< 70\%$ indica reprovação. Àqueles que fizerem a REC terão uma segunda média final (MF2) que será a média de MF1 e REC. MF2 ≥ 5 indica aprovação e $MF2 < 5$ indica reprovação.

Prova	**Data**
$P1$	19/09/19 e $P'1$ em 10/10/19
$P2$	21/10/19
$P3$	21/11/19
SUB	28/11/19 Fechada
REC	a ser marcada em Janeiro ou Fevereiro de 2020.

Obs. Aqueles que fizeram a $P1$ podem, opcionalmente, complementá-la com a $P'1$. No caso desse complemento a média da $P1$ passará a ser $(2P1 + P'1)/3$.