DINÂMICA EM BAIXAS DIMENSÕES

Conteúdo

1. Resumo

A teoria moderna de sistemas dinâmicos começou com o trabalho de Poincaré e, desde então, cresceu e amadureceu, tornando-se uma área importante da matemática. O objetivo principal deste projeto é aprofundar o conhecimento das seguintes áreas de sistemas dinâmicos:

- Sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade, seus aspectos dinâmicos e topológicos.
- Equações diferenciais polinomiais no plano e o 16º problema de Hilbert.
- Difeomorfismos em dimensão 2 como, por exemplo, transformações de Hénon e *twist maps* do anel.
- Teoria de renormalização em dimensões 1 e 2.
- Endomorfismos do intervalo (por exemplo, questões analíticas delicadas como decaimento de geometria e existência de medidas invariantes); transformações críticas do círculo; renormalização e o espaço de parâmetros.
- Teoria de Teichmüller e suas conexões com dinâmica em dimensões baixas.
- Teoria ergódica diferenciável.

Ao mesmo tempo que a teoria de sistemas dinâmicos se desenvolveu, ela se afastou de outras, também nascidas do trabalho de Poincaré: a geometria e a topologia simpléticas. Outro objetivo deste projeto é o de buscar conexões pouco exploradas entre estas áreas e tentar reestabelecer um contato entre elas próximo o bastante para que se possa usar técnicas de cada uma para atacar problemas da outra.

2. Introdução

Em seu famoso ensaio sobre a estabilidade do sistema solar, Poincaré observou, com surpresa, a prodigiosa complexidade dinâmica apresentada por sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade. Do trabalho de Poincaré nasceram áreas diferentes e frutíferas de matemática. O moderno estudo de sistemas dinâmicos tem aí o seu começo e muito do que foi feito desde então tem por objetivo explicar a complexidade observada por Poincaré. O estudo de geometria e topologia simpléticas também teve o seu início com o trabalho de Poincaré. Ambas estas áreas da matemática cresceram e amadureceram independentemente e produziram teorias hoje bastante desenvolvidas. Os objetivos principais deste projeto são aprofundar o conhecimento em algumas áreas de sistemas dinâmicos, bem como buscar uma reaproximação entre o estudo de sistemas dinâmicos e de geometria e topologia simpléticas.

Poincaré procurava originalmente descrever a dinâmica qualitativa de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade. Uma compreensão completa deste problema ainda está, provavelmente, além do alcance da matemática atual. O objetivo seria — considerando por um lado que a teoria de Kolmogorov-Arnold-Moser mostra a existência de uma figura complicada de ilhas elíticas e, por outro, que o trabalho de Hadamard, Birkhoff, Morse, Smale, Pesin, Katok e outros mostra figuras tão complicadas quanto de variedades invariantes que se cruzam e se dobram sobre si mesmas — demonstrar que todo sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade ou é completamente integrável ou tem um conjunto invariante com medida positiva que é ergódico e tem entropia positiva. Embora tentar demonstrar tal conjectura esteja além do escopo deste projeto, é útil mantê-la em mente, por prover um sentido de orientação.

A teoria de sistemas dinâmicos cresceu e se desenvolveu em direções diferentes e há hoje várias sub-áreas bastante ativas. Boa parte dos resultados mais espetaculares desta teoria nos últimos trinta anos foram obtidos no estudo de dinâmica em dimensão 1 real ou complexa e parte do projeto se dedica a continuar este estudo. Motivados em parte por este sucesso, em parte pela necessidade de se compreender fenômenos em dimensões maiores, vários pesquisadores iniciaram o estudo de sistemas dinâmicos discretos em dimensão 2 procurando estabelecer analogias com resultados obtidos em dimensão 1 e descobrir quão longe estas podem ser levadas. Desde então uma teoria bastante rica se desenvolveu, embora esta não seja hoje ainda tão completa quanto sua contrapartida unidimensional. Outra parte deste projeto se dedica a aprofundar o estudo de dinâmica discreta em dimensão 2 e de suas conexões com dinâmica unidimensional e com a teoria de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade. A teoria de renormalização tem feito um papel central no estudo de dinâmica unidimensional. Esta teoria e sua generalização para dimensão 2 serão exploradas. Além disso, análise complexa e a teoria de Teichmüller têm feito um papel crucial em grande parte do trabalho nestas áreas e também fazem parte das questões estudadas aqui. A teoria de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade tem vários problemas importantes em aberto, alguns dos quais serão estudados aqui. Além disso, como foi mencionado acima, foi de problemas de sistemas hamiltonianos que emanou uma parte importante dos outros problemas tratados aqui.

3. Projeto de pesquisa

Como mencionamos acima, este projeto se desdobra em várias frentes, as quais relacionamos abaixo.

3.1. **Fluxos em baixas dimensões e sistemas hamiltonianos.** O estudo de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade consiste, quando restrito às superfícies de energia constante, no estudo de fluxos em variedades de dimensão 3. Começamos com a descrição de problemas de pesquisa relacionados a estas duas áreas.

3.1.1. *Níveis de energia regulares e estritamente convexos.* Muitos modelos físicos, químicos, biológicos e econômicos são descritos por sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade. Quando tais sistemas são autônomos, ou seja, quando a função hamiltoniana $H\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ não depende do tempo, os níveis de energia $S = H^{-1}(c)$ são preservados pelo fluxo, para todo c na imagem de H. Quando S é difeomorfo à esfera unitária S^3, algo pode ser dito sobre a existência de órbitas periódicas em S. Por exemplo, quando S é *star-shaped* (ou seja, existe um ponto O em $\mathbb{R}^4$ tal que toda semi-reta partindo de O intersecta S em exatamente 1 ponto), então S possui pelo menos 1 órbita periódica [83]. Quando S, além de *star-shaped*, é também estritamente convexo (ou seja, tem curvatura positiva e é bordo de um subconjunto convexo em $\mathbb{R}^4$), então S possui uma órbita periódica que é bordo de uma seção global Σ [58]. Por uma seção global entende-se um disco Σ mergulhado em S cujo bordo é uma órbita periódica P, o campo hamiltoniano é transversal no interior de Σ e toda solução que passa por um ponto em $S \backslash P$, intersecta Σ para frente e para trás no tempo (mais ainda, a órbita periódica P tem índice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ}(P) = 3$). Decorre daí que o fluxo hamiltoniano em S pode ser reduzido a um difeomorfismo $\phi\colon D \to D$ do disco unitário aberto $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ que preserva área e orientação. Um dos corolários desse resultado é que em S existem exatamente 2 ou $+\infty$ órbitas periódicas. Isto se segue de um resultado de J. Franks [49] para homeomorfismos do disco que preservam área. Algumas questões importantes relacionadas a esses resultados que propomos estudar são:

(1) *A conjectura de Hofer.* H. Hofer acredita que em qualquer nível de energia *star-shaped* existem exatamente 2 ou $+\infty$ órbitas periódicas. Esse resultado já foi provado genericamente no caso em que todas as órbitas periódicas de S são não-degeneradas [59]. Questões parciais nessa direção ainda não exploradas são: no caso em que existam finitas órbitas periódicas não-degeneradas, estas devem ser elíticas, hiperbólicas? Qual o índice de Conley-Zehnder delas nesse caso? Qual o número de enlaçamento entre elas? É possível resolver essas questões em casos mais gerais que os existentes?
(2) *Ergodicidade de fluxos geodésicos em S^2.* Dada uma métrica em S^2 com curvatura positiva, considere o fluxo geodésico associado a essa métrica (que é equivalente, através de um recobrimento duplo de T_1S^2, a um fluxo hamiltoniano em um nível de energia *star-shaped*). Ainda é um problema aberto se tais fluxos geodésicos podem ou não ser ergódicos. Há exemplos de fluxos geodésicos ergódicos em S^2, mas todos com pontos com curvatura negativa [42], [43]. Questões nessa direção ainda não exploradas: entender e adaptar para o fluxo geodésico em S^2 os resultados de curvas pseudo-holomorfas já desenvolvidos em S^3.

3.1.2. *Níveis de energia singulares e estritamente convexos.* Supomos agora que $S = H^{-1}(c)$ possui uma componente invariante pelo fluxo que é homeomorfa a S^3, estritamente convexa, mas não é regular por possuir uma singularidade p_c, correspondente a um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro, isto é, os auto-valores da derivada do campo hamiltoniano X_H em p_c são α, $-\alpha$, ωi e $-\omega i$ onde $\alpha, \omega > 0$. Tais níveis de energia têm particular importância em sistemas planetários. O fluxo numa vizinhança de p_c possui uma forma normal devida a J. Moser (veja [77]) e, como o próprio nome diz, pode ser decomposto em dois planos, em um dos quais o comportamento é semelhante a uma sela e, no outro, a um centro. P. Salomão e C. Ragazzo provaram em [55] que conforme a distância mínima de uma órbita periódica P ao sela-centro se aproxima de zero, o índice de Conley-Zehnder $\mu_{\mathrm{CZ}}(P)$ tende a $+\infty$. Isso implica a existência de uma órbita periódica em S com propriedades topológicas bastante particulares. Outro resultado dos mesmos autores [54] afirma que se existe uma órbita homoclínica $\gamma \subset S$ a p_c e o fluxo hamiltoniano numa vizinhança de γ é integrável ou quase-integrável, então existe uma órbita periódica P em S que é bordo de uma seção global Σ . O fluxo em S é, portanto, descrito por um homeomorfismo $\phi\colon D \to D$ que não é regular apenas em um ponto w correspondente à variedade estável de p_c. Próximo a w, o homeomorfismo ϕ se comporta como um *twist* que tende a $+\infty$ ao se aproximar de w. Algumas questões ligadas a esse problema são:

(1) *É possível enfraquecer as hipóteses?* As hipóteses de integrabilidade e existência de órbita homoclínica a p_c podem ser omitidas? As técnicas de geometria simplética parecem promissoras para responder essa pergunta.
(2) *Topologia.* Qual é a estrutura topológica das órbitas periódicas e homoclínicas em S, tais como índices, tranças, etc? Diversos resultados para homeomorfismos do disco que podem ser aplicados a esses casos ainda não foram devidamente explorados. Quais sistemas hamiltonianos se enquadram nessas hipóteses? Estas questões são intimamente relacionadas às discutidas mais adiante nas Seções 3.2.1 e 3.2.4.

3.1.3. *Pontos de equilíbrio de sistemas hamiltonianos naturais.* Uma das questões mais antigas da área de sistemas dinâmicos é o estudo das propriedades locais de pontos de equilíbrio de sistemas hamiltonianos com função hamiltoniana do tipo

$$H(q,p) = T(q,p) + \pi(q),$$

onde $T\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a *energia cinética*, uma forma quadrática definida positiva nos momentos, $\pi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a *energia potencial*, uma função de classe $\mathcal{C}^k$, e Ω é uma vizinhança aberta da origem.

Quando $\pi(0) = \|\nabla\pi(0)\| = 0$ temos que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio das equações de Hamilton. A compreensão do comportamento local das soluções numa vizinhança deste equilíbrio tem sido perseguida por mais de um século. Algumas questões em particular, como o estudo da estabilidade de Liapunov deste pontos, despertaram desenvolvimentos já clássicos na teoria de equações diferenciais ordinárias.

Sobre esta questão, desde 1844 é conhecido que, se 0 é um ponto de mínimo estrito da energia potencial, então o equilíbrio associado é estável segundo Liapunov. Em 1894 Painlevé mostrou existirem energias potenciais para as quais a origem era um ponto de sela mas o equilíbrio associado era estável.

Iniciou-se então a busca de condições para estabelecer a estabilidade ou instabilidade do equilíbrio. Vários resultados significativos foram obtidos, notadamente:

- (Hagedorn-1971) Suponha que $\pi(q) < 0$ em $\Omega\backslash\{\mathbf{0}\}$ (isto é, $\mathbf{0}$ é um ponto de máximo local estrito). Então a origem é instável.

- (Moauro-Negrini-1989) Suponha que $k \geq 2$, $\pi(q) \in \mathcal{C}^{k+3}(\Omega, \mathbb{R})$, $\pi = \pi_k + W$, onde π_k é um polinômio homogêneo de grau k, sem máximo na origem, e $W = o(\|q\|^k)$. Então a origem é um equilíbrio instável, e existe uma solução das equações do movimento assintótica à origem.
- (Palamodov-1995) Suponha que $\pi \in \mathcal{C}^\omega$, e que π não tem mínimo na origem. Então a origem é um equilíbrio instável.

Na década de 70 conjecturou–se que, se o jato de ordem k de π mostrar que a origem não é um ponto de mínimo, então a origem é instável. Aqui, diz-se que *'o jato $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo na origem'* se, para qualquer função f tal que $j^k f = j^k\pi$, a origem não é um ponto de mínimo local de f. Este resultado seria equivalente a uma caracterização completa dos jatos que garantem a instabilidade, pois, se $j^k\pi$ não mostra que π não tem mínimo, existe π_2 com $j^k\pi = j^k\pi_2$, π_2 tem um mínimo local em $\mathbf{0}$ e portanto $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ é um equilíbrio estável. Barone-Netto, Gorni e Zampieri mostraram que, se $f \in \mathcal{C}^\omega$, não tem mínimo na origem, existe k tal que $j^k f$ mostra que f não tem mínimo. Logo, o resultado conjecturado também estenderia o teorema de Palamodov. Em [51], a conjectura enunciada foi demonstrada para hamiltonianos com dois graus de liberdade. Além disso, também foi provada a existência de uma trajetória assintótica à origem, resultado que não era conhecido mesmo no caso de energias potenciais analíticas.

Uma das direções que nossa pesquisa deverá tomar será a de tentar, utilizando as técnicas desenvolvidas para o caso com dois graus de liberdade, estender nossos resultados para o contexto geral de n graus de liberdade. Começaremos por tentar demonstrar a conjectura para o caso genérico onde o jato de ordem 2 da energia potencial é uma forma quadrática semi-definida positiva, e a matriz hessiana de π tem até dois autovalores nulos.

Outra questão pertinente ao estudo de pontos de equilíbrio de sistemas hamiltonianos é: qual o papel da energia cinética? Os teoremas citados mostravam a estabilidade ou instabilidade do equilíbrio com hipóteses apenas sobre a energia potencial; da energia cinética exigia-se apenas alguma regularidade. Porém, num resultado recente de Bertotti e Bolotin (ver [15, 16]), os autores mostraram existir duas energias cinéticas T_1, T_2 e uma energia potencial π de forma que o equilíbrio do sistema $H_1 = T_1 + \pi$ é instável, enquanto que o equilíbrio do sistema $H_2 = T_2 + \pi$ é estável.

Em [52], foram exibidos dois exemplos que também mostram a importância da energia cinética no comportamento das soluções das equações do movimento na vizinhança do equilíbrio. Um é o primeiro exemplo explícito do resultado de Bertotti e Bolotin, onde a troca de energia cinética altera a estabilidade. O segundo é um exemplo de energia potencial analítica e de duas energias cinéticas de forma que a bacia de atração do equilíbrio tem dimensão 1 com uma energia cinética, enquanto que para o sistema lagrangiano com a outra energia cinética a dimensão é 2.

A questão natural que segue destes resultados é como caracterizar as energias potenciais analíticas para as quais este tipo de fenômeno é possível. No exemplo citado em [52] a matriz hessiana da energia potencial era nula. Uma primeira direção a se considerar é tentar mostrar que genericamente este fenômeno é impossível quando, por exemplo, a hessiana de π não tiver autovalores nulos, ou quando só tiver um autovalor nulo.

3.1.4. *Resolução de singularidades de campos de vetores.* Seja N uma variedade analítica (real ou complexa) de dimensão n, e seja X um campo de vetores analítico não-nulo em N. Definimos o *conjunto singular* de X como sendo o subconjunto analítico

$$S(X) = \{p \in N \mid X(p) = 0\}.$$

Diremos que X é *reduzido* se $\operatorname{codim}(S(X)) \geq 2$. De fato, quando se estuda a dinâmica associada a um campo de vetores X, pode-se sempre supor o caso reduzido, pois se $\operatorname{codim}(S(X)) = 1$ então existe uma funcão analítica g em N e um campo de vetores reduzido Y tal que $X = g \cdot Y$, e, portanto, todas as curvas solução de X são curvas solução de Y. Uma singularidade $p \in S(X)$ é dita *elementar* se a matriz jacobiana $DX(p)$ possui pelo menos um autovalor distinto de zero. Neste caso, podemos utilizar diversas ferramentas (e.g. [56]) para estudar o comportamento qualitativo das curvas solução de X em uma vizinhança U de p. No caso de singularidades *degeneradas*, isto é, não-elementares, este estudo local se torna extremamente complicado. Uma das principais técnicas para abordar estas complicações é a *redução de singularidades.* Esta consiste em uma transformação analítica sobrejetiva própria de uma nova variedade analítica $\widetilde{N}$ em N, $\Phi\colon \widetilde{N} \to N$, que é um difeomorfismo fora de $S(X)$. A partir de tal transformação, podemos definir de forma única um novo campo de vetores analítico reduzido $\widetilde{X}$ em $\widetilde{N}$ de tal forma que $\Phi^*(\widetilde{X}) = X$ em $\widetilde{N} \setminus \Phi^{-1}(S(X))$. Em particular, Φ^{-1} mapeia curvas solução de X em curvas solução de $\widetilde{X}$.

No caso em que todos os pontos $\tilde{p} \in S(\widetilde{X})$ são singularidades elementares, dizemos que X foi *desingularizado* pela transformação Φ. Assim, nos casos em que a desingularização pode ser feita, este processo nos leva novamente ao problema de estudar as curvas solução de um campo de vetores cujas singularidades são todas elementares.

A conjectura de desingularização para campos de vetores analíticos afirma que este processo sempre pode ser efetuado:

Conjectura. *Suponha que $U \subset N$ é um aberto relativamente compacto. Então existe uma transformação $\Phi : \widetilde{N} \to U$ que desingulariza o campo de vetores X restrito a U.*

Essa conjectura foi demonstrada para $n = 2$ por Bendixson-Seidenberg (ver e.g. [75]). Em um trabalho recente de Daniel Panazzolo [82], este resultado foi estendido para $n = 3$ no caso analítico real.

Durante a vigência do projeto, propõe-se estudar os seguintes problemas:

(1) *Campos analíticos complexos.* Estender o resultado de [82] para o caso analítico complexo.
(2) *Modelos finais.* Em dimensão 3, fazer o estudo dos *modelos finais* de campos de vetores que são obtidos pelo processo de desingularização. Isto inclui, por exemplo, descrever as possíveis formas normais (no sentido de Poincaré) para tais campos.

3.1.5. *Perturbações Singulares.* Problemas sobre perturbações singulares aparecem freqüentemente em aplicações. Tipicamente, tais problemas são representados por uma equação diferencial da forma

$$(*) \qquad \varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y, \varepsilon, \alpha)$$

onde $(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0)$, $\alpha \in (\mathbb{R}^n, 0)$ é chamado *parâmetro de controle*, $\varepsilon \in (\mathbb{R}^+, 0)$ é chamado *parâmetro singular* e f é uma função diferenciável tal que $f(x, 0, 0, 0) = 0$. O conjunto $\Gamma = \{y = \alpha = \varepsilon = 0\}$ é chamado de *variedade lenta*, e constitui uma curva de singularidades não isoladas da equação diferencial.

Em [81] foi estudado o problema de encontrar famílias de curvas solução de $(*)$ (parametrizadas por ε) que tendem a Γ quando o parâmetro singular ε tende a zero. Tais famílias são denominadas *soluções canard.* Sucintamente, sob certas hipóteses de *transversalidade* e supondo também que quase todas a singularidades em Γ são elementares, foi demonstrado neste artigo que tais soluções podem ser perfeitamente caracterizadas através da técnica de blow-up em famílias.

O artigo acima levantou as seguintes questões, cujas respostas pretende-se buscar durante a vigência do projeto:

(1) As mesmas técnicas podem ser utilizadas para abordar o problema equivalente em m-dimensões,
$$\varepsilon \frac{d\mathbf{y}}{dx} = f(x, \mathbf{y}, \varepsilon, \alpha)$$
com $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^m, 0)$?

(2) Supondo que a variedade lenta Γ seja difeomorfa à circunferência $\mathbb{S}^1$, o que é possível dizer com relação à *ciclicidade de* Γ, isto é, o número de ciclos limite que bifurcam de Γ por perturbação dos parâmetros ε, α?

(3) A técnica de desingularização em famílias pode ser utilizada para o estudo de casos mais degenerados, por exemplo, abandonando a hipótese de que quase todos os pontos de Γ são elementares?

3.1.6. *Ciclicidade de Policiclos Elementares.* Um *policiclo elementar* de um campo de vetores bidimensional é um conjunto compacto invariante formado pela união de um número finito de singularidades hiperbólicas e semi-hiperbólicas do tipo sela e de conexões heteroclínicas entre as variedades invariantes destes pontos.

Um passo importante na solução do 16º Problema de Hilbert seria a prova da seguinte conjectura:

Conjectura (Finitude para policiclos elementares)**.** *Seja X_λ uma família analítica de campos de vetores em $\mathbb{R}^2$, com parâmetros $\lambda \in (\mathbb{R}^n, 0)$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ um policiclo elementar para X_0. Então existem um número natural $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de Γ e uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ da origem tais que a seguinte propriedade é verificada: para cada $\lambda \in V$, o campo de vetores X_λ possui no máximo n ciclos limite em U.*

No caso em que $n = 0$, isto é, o caso sem parâmetros, este resultado foi provado independentemente por Ilyashenko [61] e Ecalle [45]. Uma das consequências é o famoso *Teorema de Dulac.*

Recentemente, Mourtada anunciou em [78] uma prova desta conjectura para famílias arbitrárias, com a hipótese de que o policiclo Γ é *hiperbólico*, isto é, cada singularidade de Γ é uma sela hiperbólica. A presença de parâmetros de desdobramento complica muito o problema, especialmente devido à presença dos chamados *compensadores de Ecalle-Roussarie.* A prova de Mourtada é muito longa e contém muitas idéias novas. Em particular, ele conseguiu tratar o problema de forma geométrica, combinando a Teoria de Fewnomials [63] e a Teoria de Álgebras Topológicas Noetherianas [89].

Propõe-se estudar a possibilidade de estender os resultados de Mourtada nos casos seguintes:

(1) *Policiclos elementares não-hiperbólicos.*
(2) *Campos de linhas folheados.*

O último item refere-se a objetos que generalizam a noção usual de famílias de campos de vetores. Em poucas palavras, permitimos que as integrais primeiras (usualmente dadas for $\{d\lambda = 0\}$) sejam singulares. A importância do estudo dos campos de linhas folheados reside no fato destes serem os objetos finais obtidos na desingularizarização de famílias de campos de vetores em dimensão 2 [44].

3.2. **Dinâmica discreta em dimensão 2.** Como acabamos de ver, o estudo da mecânica hamiltoniana com 2 graus de liberdade e, mais geralmente, de equações diferenciais ordinárias (EDO's), frequentemente leva, após algumas construções padrão, a problemas sobre o comportamento dinâmico de homeomorfismos do disco, do anel ou do toro em dimensão 2. Um exemplo típico acontece no estudo de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade, após restringir a uma variedade de energia constante e encontrar uma seção de Poincaré para o campo.

A compreensão de alguns destes problemas tem seu início com o chamado "último teorema geométrico de Poincaré," hoje em dia mais conhecido como Teorema de Poincaré-Birkhoff. Este resultado relaciona propriedades dinâmicas de certos homeomorfismos do anel (existência de pontos fixos) com a existência de órbitas periódicas para o problema restrito dos 3 corpos (ver por exemplo [85]).

Birkhoff, que foi aluno de Poincaré, pode ser considerado o pai da dinâmica topológica pois, além de ter dado a primeira prova convincente para o teorema mencionado acima, iniciou o estudo dos chamados *twist mappings (difeomorfismos de tipo twist)*, que são difeomorfismos do cilindro com certas propriedades especiais (ver [17], [19], [18] e [20]). Os difeomorfismos de tipo twist aparecem naturalmente quando se estuda a dinâmica na vizinhança de certas órbitas periódicas para sistemas hamiltonianos, nos bilhares convexos e na vizinhança de pontos periódicos elípticos genéricos de difeomorfismos que preservam área em dimensão 2. Existem também aplicações dos twist mappings ao estudo de aceleradores de partículas e na modelagem da interação entre átomos de cristais, como por exemplo no famoso modelo de Frenkel-Kontorova. O estudo da dinâmica topológica em superfícies se desenvolveu de maneira independente da física matemática e do estudo de EDO's, mas, de tempos em tempos, aplicações importantes são descobertas, como por exemplo o importante resultado de J. Franks [49] já mencionado em 3.1.1. Neste artigo demonstrou-se que um homeomorfismo do anel que preserva área e tem pelo menos uma órbita periódica possui, necessariamente, um número infinito de tais órbitas. Disto se segue que toda métrica com curvatura positiva na esfera S^2 possui um número infinito de geodésicas fechadas.

Outro aspecto de dinâmica em dimensão 2 diz respeito a famílias de transformações de superfícies como, por exemplo, aquelas introduzidas por Hénon [57] e Lozi [69]. Tais famílias têm sido estudadas extensivamente nos últimos anos. Em [11, 76], foi demonstrado que, sob hipóteses razoáveis, elas possuem atratores "estranhos" que, além disso, são abundantes no sentido de que há um conjunto de medida positiva de parâmetros para os quais tais atratores existem. As propriedades estocásticas de atratores de Hénon foram estudadas em [12, 13], por exemplo. Outros autores (por exemplo, [10, 24, 47, 60]) estudam a família de Hénon complexa. Entre outras coisas, foram exibidas semelhanças e diferenças interessantes entre a família de Hénon complexa e a sua análoga em dimensão 1, a família quadrática. Em [80], várias conjecturas e resultados recentes sobre o comportamento genérico de sistemas dinâmicos em dimensão 2 são enunciados. Há ainda muitas questões centrais em aberto nesta área, tornando-a bastante ativa.

3.2.1. *Homeomorfismos do anel, do cilindro e do toro.* Um resultado de grande importância nesta área é o teorema de Conley-Zehnder [30], que afirma que qualquer difeomorfismo do toro T^2 que é homotópico à identidade, preserva área e tem número de rotação da medida de Lebesgue igual a zero, possui pelo menos 3 pontos fixos. Este teorema é, na realidade, bastante mais geral e afirma que um simplectomorfismo do toro T^{2n} tem pelo menos $2n+1$ pontos fixos.

Em dimensão 2, existem diversas provas topológicas de versões do teorema de Conley-Zehnder que valem para homeomorfismos do toro, sob hipóteses bem menos restritivas. A primeira delas é provavelmente devida a Franks [48] e garante a existência de um ponto fixo. Em seguida Flucher [46] demonstrou a existência de dois pontos fixos e finalmente Le Calvez [67] garante a existência de três pontos fixos. Na verdade, muito mais foi dito sobre os homeomorfismos do toro homotópicos à identidade que preservam área e têm número de rotação da medida de Lebesgue igual a zero. Dentre outras coisas, em [68], Le Calvez mostrou que tais homeomorfismos têm um número infinito de pontos periódicos.

O trabalho já realizado nesta direção pode ser separado em duas sub-linhas de pesquisa:

(1) Estudo dos difeomorfismos do tipo twist no toro.
(2) Estudo de propriedades mais gerais de homeomorfismos e difeomorfismos no toro, anel e cilindro.

No que se segue, descreveremos resumidamente cada uma destas linhas, citando alguns resultados obtidos e algumas metas a serem atingidas.

3.2.2. *Twist Mappings.* Na série de artigos [1], [8], [7], [5], [2] e [4] desenvolveu-se o estudo da dinâmica de difeomorfismos do tipo twist no toro. Provou-se a existência de um invariante topológico chamado intervalo de rotação vertical, que tem certas propriedades importantes, algumas delas análogas às do conjunto de rotação de endomorfismos do círculo, ver [23]. *Grosso modo*, aos pontos interiores racionais pode-se associar pelo menos duas órbitas periódicas com esse número de rotação vertical e aos pontos irracionais correspondem conjuntos compactos, invariantes, também com esse número de rotação.

A análise de como os extremos deste intervalo variam com o difemorfismo pode ser útil no ataque a dois tipos de problemas importantes nessa área:

(1) *Estudo da ruptura de curvas rotacionais invariantes para famílias de difeomorfismos de T^2.* Suponha que
$$f_0(x,y) = (x+y, y) \pmod{1}^2$$
e que f_t é uma família de difeomorfismos do tipo twist que preservam área, de classe C^k $(k = 4, 5, 6, \ldots, \infty, \varpi)$ com respeito a $(x, y), t \in T^2 \times \mathbb{R}$. Queremos entender como pode ser o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(\gamma) = \gamma$ para pelo menos

uma curva fechada simples não homotopicamente trivial $\gamma \subset T^2$. A teoria de twist mappings implica que a classe de homotopia de γ no toro tem que ser $(1,0)$, ou seja, γ é homotópica a uma curva horizontal. De fato, pelo teorema da curva invariante de Birkhoff, γ se projeta injetivamente na coordenada horizontal. A relação entre esse problema e o intervalo de rotação vertical segue de que uma curva γ como acima só existe se o intervalo de rotação vertical ρ_V estiver reduzido a 0. Isto é, se não existem curvas γ como acima, então $\rho_V(f_t) = [a,b]$, com $a < 0 < b$. Desta forma, procurar parâmetros para os quais não existem curvas rotacionais invariantes é equivalente a procurar aqueles para os quais ρ_V não está reduzido a 0; ver [4] para uma primeira aplicação desta técnica.

(2) *Ergodicidade de twist mappings no toro.* A versão mais geral possível deste problema consiste em decidir se existe um difeomorfismo C^∞ de tipo twist no toro que preserve a medida de Lebesgue e que seja ergódico com relação a ela. Na topologia C^1, um trabalho recente de Bonatti-Croivisier [21] no qual é demonstrado que transitividade é uma propriedade C^1-genérica, nos dá a indicação de que isso talvez seja possível. Com diferenciabilidade maior, por outro lado, a teoria KAM diz que ilhas elípticas não podem ser destruídas por perturbações pequenas, o que complica muito a situação. Há um problema correlato, mais relacionado com a teoria de intervalo de rotação vertical. Se considerarmos a família standard, dada por

$$f_k(x,y) = (x + y + k\sin(2\pi x), y + k\sin(2\pi x)) \pmod 1)^2,$$

simulações numéricas tornam a seguinte pergunta natural: para o parâmetro $k > 0$ suficientemente grande, é positiva a medida do subconjunto de parâmetros k para os quais f_k é ergódico? Na verdade, sequer se sabe se existe um único parâmetro onde haja ergodicidade.

Considerando o conjunto $\rho_V(f_k) = [a(k), b(k)]$, é possível mostrar que, se para um certo $k_0 > 0$, $a(k)$ ou $b(k)$ não forem localmente constantes com k numa vizinhança de k_0, então para todo $k \neq k_0$ suficientemente próximo de k_0, f_k não é ergódico. O fato de $a(k), b(k)$ serem localmente constantes parece estar relacionado com a racionalidade dos seus valores. Em [7] e [5] esta relação é demonstrada no contexto de difeomorfismos de tipo twist, não restrito a uma família particular, mas satisfazendo uma condição de transversalidade.

Assim, um objetivo importante é o de tentar descobrir se f_k possui alguma propriedade que a torne "transversal" com relação às perturbações de [7] e [5] e, posteriormente, tentar obter alguma informação sobre a medida do conjunto de parâmentros associados a extremos racionais e irracionais.

3.2.3. *Homeomorfismos e difeomorfismos do toro, anel e cilindro.* O objetivo aqui é obter informação sobre a dinâmica de certas aplicações estudando os seus conjuntos de rotação e descrever certas condições topológicas que garantam a existência de órbitas periódicas (ver [3] e [6] para um exemplo de problemas estudados).

Atualmente, S. Addas-Zanata tenta provar uma conjectura de P. Boyland sobre homeomorfismos do anel que preservam área. *Grosso modo*, o objetivo é saber se o conjunto de rotação de um tal homeomorfismo pode ter como um dos extremos o número de rotação da medida de Lebesgue e não ser reduzido a esse valor apenas. Durante o projeto, S. Addas-Zanata também estudará alguns problemas mais gerais, sobre homeomorfismos em espaços métricos compactos, relativos a medidas invariantes que minimizam certas propriedades. Mais precisamente, tentará provar que para homeomorfismos em certos espaços métricos X, dada uma função g definida em X a valores reais, a seguinte condição é genérica: a medida invariante pelo homeomorfismo que minimiza a integral de g é suportada numa órbita periódica.

3.2.4. *Famílias de difeomorfismos de superfícies.* A grande complexidade dinâmica que deixou Poincaré atônito foi a intrincada teia de interseções entre variedades estáveis e instáveis de pontos de sela. A criação de uma interseção homoclínica implica na existência de diversas outras estruturas dinâmicas, tais como pontos periódicos atratores (poços), atratores do tipo Hénon [76], coexistência de infinitos poços, coexistência de infinitos atratores estranhos [25], e muitas outras. Colli e Vargas demonstraram [29], por exemplo, que nas proximidades da criação de uma órbita homoclínica, pode haver uma ferradura e uma medida invariante qualquer suportada na ferradura cujo conjunto de pontos genéricos é um aberto.

Nesta parte do projeto, procura-se estudar os aspectos topológicos e geométricos da dinâmica de famílias de homeomorfismos e difeomorfismos de superfícies. Os objetivos principais são dar uma descrição completa da dinâmica topológica para uma tal família que passa de dinâmica trivial a caótica, desenvolver uma teoria de modelos *quase-lineares* para difeomorfismos de superfícies análoga àquela de semi-conjugação a modelos lineares por partes em dimensão 1 desenvolvida por Milnor and Thurston e entender *implicação* entre órbitas periódicas em dimensão 2. Mais especificamente, os problemas a serem atacados são:

(1) *A Conjectura da Frente de Poda.* Cvitanović introduziu *poda (pruning)* como um análogo bidimensional para a *teoria de kneading* de Milnor e Thurston e mostrou numericamente como os modelos de poda são capazes de descrever acuradamente as transformações de Hénon. Em [31], poda foi estabelecida de maneira matematicamente rigorosa e, por meio de exemplos, foi observado que a *família de poda* pode mesmo ser grande o suficiente para conter modelos topológicos para todas as transformações de Hénon. Esta afirmação é tornada rigorosa na *Conjectura da Frente de Poda (CFP):* a família de poda contém a família de Hénon a menos de semi-conjugação. Em outras palavras, a conjectura afirma que, a menos de semi-conjugação, toda transformação de Hénon pode ser descrita como uma "ferradura parcial," isto é, como a ferradura de Smale da qual se destruiu — podou — parte da dinâmica. A CFP é um problema central ainda em aberto sobre dinâmica em dimensão 2. Uma demonstração desta conjectura e as técnicas utilizadas para obtê-la possibilitarão o entendimento, não somente da família de Hénon, mas também da transição para o caos em dimensão 2 em um contexto bastante geral.

(2) *Modelos quase-lineares para difeomorfismos em dimensão 2.* Um dos principais resultados da teoria de kneading é a demonstração da existência de modelos lineares por partes para endomorphismos do intervalo. A. de Carvalho vem desenvolvendo um programa para a construção de tais modelos em dimensão 2 — modelos *quase-lineares*, isto é, lineares a menos de singularidades. Este programa envolve várias técnicas, desde o estudo de tipos de trança até as teorias de transformações quase-conformes e de Teichmüller e é composto de vários passos, muitos dos quais têm interesse independente.

(3) *Implicação entre órbitas periódicas em dimensão 2.* Poda pode ser vista como uma tentativa de descrever famílias de homeomorfismos de superfícies "de fora," isto é, de maneira construtiva, apresentando modelos topológicos para todas as transformações da família. Vindo no sentido oposto, é possível também tentar entender *restrições* na maneira em que a dinâmica é criada em famílias que passam de comportamento dinamicamente trivial a caótico. Aqui, o estudo de *implicação entre órbitas*, isto é, de quando e como a presença de certa órbita periódica implica a existência de outras órbitas, faz um papel central. O problema de implicação em dimensão 1 foi bastante estudado e hoje existe, para este caso, uma teoria bem desenvolvida. Em dimensão 2, o problema é bem mais complicado, já que mesmo a especificação topológica de órbitas periódicas é bastante mais elaborada. Os artigos [32, 33, 34] de A. de Carvalho e T. Hall começam a tratar do problema de implicação entre órbitas periódicas da ferradura de Smale, mas há ainda um grande número de questões importantes em aberto.

3.3. **Renormalização.** O conceito de renormalização tem suas origens em teoria dos campos e mecânica estatística. A partir dos anos 70, com as descobertas de universalidade de Coullet e Tresser e de Feigenbaum, passou a ter um papel fundamental na teoria de sistemas dinâmicos em dimensão 1 real ou complexa. A demonstração matematicamente rigorosa dos fenômenos observados por Feigenbaum e Coullet-Tresser só se deu no início dos anos 90 e, durante esses vinte anos, a teoria matemática de renormalização atingiu níveis altíssimos de sofisticação. Este projeto propõe o estudo de questões da teoria de renormalização em dimensão 1 e também sua generalização para o estudo de sistemas dinâmicos em dimensão 2, especificamente, da transformação de Hénon.

3.3.1. *Renormalização em dimensão 1.*

(1) *Renormalização e transformações críticas do círculo.* No início dos anos 80, descobertas experimentais de universalidade semelhantes às do caso unimodal foram feitas por Feigenbaum, Kadanoff e Shenker no contexto de transformações críticas do círculo. Para explicar tais universalidades, Lanford [64, 65, 66] e Ostlund, Rand, Sethna e Siggia [79, 84] introduziram um operador de renormalização para homeomorfismos críticos do círculo (em termos dos chamados pares comutantes) e conjecturaram a hiperbolicidade desse operador. Em 1992, em sua tese de doutorado [36], Edson de Faria introduziu o conceito de par comutante holomorfo, utilizando-o em combinação com técnicas de deformação de estruturas complexas em laminações de superfícies de Riemann, criadas por Sullivan [87, 86], para provar a convergência das renormalizações de homeomorfismos críticos com número de rotação de tipo limitado. Este resultado estabeleceu de forma conceitual a existência de um atrator topológico para o operador de renormalização supramencionado. Posteriormente, E. de Faria e W. de Melo em [37, 38] estabeleceram a convergência exponencial das renormalizações de tais homeomorfismos para o atrator (na topologia C^0).

Em trabalho conjunto, E. de Faria W. de Melo (IMPA) e A. Pinto (FC-Porto), pretendem provar que o operador de renormalização atuando no espaço de transformações críticas do círculo de classe C^r com $r \geq 3$ é globalmente hiperbólico.

Para atingir este objetivo serão utilizadas as ferramentas desenvolvidas pelos mesmos três pesquisadores num trabalho anterior para transformações unimodais, recentemente aceito para publicação em *Annals of Mathematics* (ver [39]), bem como um trabalho recente de M. Yampolsky e D. Khelmev ainda não publicado.

(2) *Renormalização em aplicações dissipativas com uma descontinuidade.* Motivados pelo aparecimento de aplicações unidimensionais com uma descontinuidade em fenômenos físicos (ver [27] e referências ali contidas), surgido de interação com o Laboratório de Fenômenos Não-Lineares do IFUSP, Colli e seu aluno de doutoramento Márcio Alves estudam atualmente o operador de renormalização que surge no espaço de funções do intervalo que, além da descontinuidade apresentam derivada entre 0 e 1.

Numa família a três parâmetros invariante pelo operador (onde estiver definido), foi possível obter uma laminação bidimensional de lâminas C^∞, que consiste das funções infinitamente renormalizáveis, e agora outras propriedades dessa laminação, como regularidade das holonomias e dimensão de Hausdorff da interseção de variedades transversais, estão sendo investigadas. O objetivo é estendê-los para o contexto de dimensão infinita, otimismo que se justifica por hipóteses simplificadoras como a ausência de pontos críticos, a injetividade e a contração em toda parte que, porém, de forma alguma trivializam a dinâmica.

3.3.2. *Renormalização em dimensão 2.* Em trabalho conjunto de A. de Carvalho, M. Lyubich e M. Martens [35], uma teoria de renormalização em dimensão 2 foi iniciada. Foi definido um operador de renormalização que age no espaço de transformações de tipo Hénon e foi demonstrado que o ponto fixo do operador de renormalização unidimensional é também um ponto fixo hiperbólico do operador em dimensão 2. Há evidência de que transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis formam uma família contendo uma quantidade não-enumerável de transformações topologicamente distintas, isto é, que não são topologicamente conjugadas umas às outras, o que contrasta com o que acontece em dimensão 1. Há também evidência de que transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis satifazem a CFP. Isto será conseqüência de uma descrição completa de como se comportam as variedades invariantes do seus pontos periódicos. Pretendemos continuar o estudo de renormalização em dimensão 2 e estabelecer relações mais estreitas com outros assuntos tratados neste projeto na parte de dinâmica em dimensão 1. Demonstrar a CFP para transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis parece ser um objetivo realista a médio prazo. Queremos ainda estudar a rigidez (ou falta dela) dos conjuntos de Cantor críticos. Embora o conjunto de transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis seja, admitidamente, um subconjunto pequeno (de co-dimensão um) dentro da família de Hénon, a prova de CFP para estas transformações seria a primeira prova desta conjectura para transformações não-hiperbólicas. Além disto, é provável que as técnicas utilizadas aqui se generalizem para operadores de renormalização de outros períodos, tornando possível demonstrar a CFP para famílias de transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis com outras combinatórias.

Um argumento de transversalidade mostra que a família de Hénon contém transformações infinitamente renormalizáveis não-triviais, isto é, com $b \neq 0$. Nossa intuição é que, de fato, o conjunto de transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis consiste de uma curva que se estende de $b = 0$ até $b = 1$ no plano de parâmetros, contendo portanto transformações que preservam área. Como freqüentemente acontece com questões que envolvem o espaço de parâmetros, demonstrar este fato parece ser bastante difícil e, na verdade, sequer temos uma idéia clara de como proceder. Pretendemos fazer explorações numéricas do espaço de parâmetros na família de Hénon para ver se é possível confirmar este fato. Em caso afirmativo, teremos uma nova rota para explorar transformações infinitamente renormalizáveis que preservam área e, possivelmente, um novo modo de estudar os fenômenos observados por MacKay [73].

3.4. **Dinâmica unidimensional real e complexa.** Boa parte da produção matemática na área de sistemas dinâmicos nos últimos trinta anos trata da dinâmica de polinômios reais. Muitos destes resultados foram provados apenas para o caso unimodal, ou seja, o caso em que o polinômio possui apenas um ponto crítico de tipo extremo. No caso de polinômios reais com vários pontos críticos alguns resultados relevantes foram obtidos recentemente por Edson Vargas em [91], Sebastian van strien e Edson Vargas em [90] e por Grzegorz Swiatek e Edson Vargas em [88]. Há, no entanto, ainda muito a ser feito. Por exemplo, efeitos da falta de simetria e complicações analítico-combinatórias associadas a pontos críticos de inflexão com freqüência escondem aspectos dinâmicos interessantes que devem ser explorados mais profundamente.

3.4.1. *Dinâmica real.*

(1) *Famílias dinâmicamente completas de endomorfismos do círculo.* Em trabalho que vem sendo desenvolvido conjuntamente por Edson de Faria, Welington de Melo, Pedro Salomão e Edson Vargas [40], estuda-se o problema da construção de famílias dinamicamente completas de endomorfismos do círculo. Por família dinamicamente completa entende-se uma família de endomorfismos, cuja topologia esteja fixada de antemão, que depende apenas de um número finito de parâmetros e tem a propriedade de que todo endomorfismo com aquela mesma topologia é semi-conjugado a algum (preferencialmente um único) elemento da família. No trabalho em questão [40], uma vez fixado o grau topológico d e o número m de pontos críticos dos endomorfismos do círculo, os autores constroem uma família de dimensão finita de produtos de Blaschke de grau d com exatamente m pontos críticos que é dinamicamente completa. A construção se faz via o chamado operador de Thurston, seguindo uma estratégia originalmente proposta por W. de Melo.
(2) *Decaimento de geometria na família cúbica.* Muitas propriedades dinâmicas, tanto no espaço de fase como no de parâmetros, dependem de aspectos métricos e geométricos do conjunto ω-limite dos pontos críticos. Estes, por sua vez, dependem do comportamento de aplicações de primeiro retorno em vizinhanças arbitrariamente pequenas de pontos críticos recorrentes. A existência ou não de *decaimento exponencial de geometria* é um problema central neste contexto. Consideramos os polinômios cúbicos reais dados por $P_{ab}(x) = ax^3 + bx^2 + (1 - a - b)x$ que são bimodais. Neste caso existem dois pontos críticos de ordem 2 (quadráticos) mas pode haver uma forte iteração entre eles. Seria interessante explorar a existência de uma propridade topológica que determine quando esta interação é forte suficiente para impedir o decaimento de geometria. Nesta direção, Liane Bordignon e Edson Vargas estão concluindo o trabalho [22] que

considera o caso tido como o mais delicado — o de combinatória de Fibonacci — e se prova a ocorrência de decaimento exponencial de geometria, além de várias de suas consequências. Em geral, conjectura-se que se não existem retornos centrais então ocorre decaimento exponencial de geometria e o polinômio é estocástico. Isto seria uma generalização natural de [74] e constitui uma etapa crucial em direção à demonstração de que na família cúbica quase todos os parâmetros (no sentido da medida de Lebesgue) correspondem a polinômios hiperbólicos ou estocásticos.

(3) *Pontos críticos de inflexão.* Os pontos críticos de inflexão desempenham um papel ainda pouco conhecido em dinâmica unidimensional. Em pequenas vizinhanças destes pontos a dinâmica, ao contrário do que ocorre com os pontos críticos que são extremos locais, não possui simetrias naturais. A compreensão dos efeitos desta falta de simetria requer o desenvolvimento de novas técnicas e espera-se que este estudo venha a produzir resultados importantes. Propõe-se aqui analisar a dinâmica dos recobrimentos do círculo que possuem um único ponto crítico de ordem $\alpha > 1$.

Inicialmente procurar-se-á verificar a existência de decaimento exponencial de geometria para os recobrimentos críticos do círculo que possuem a combinatória de Fibonacci e $1 < \alpha \leq 2$. Posteriormente serão consideradas todas as combinatórias com cascatas de retornos centrais limitadas. Polinômios reais quadráticos podem possuir medidas físicas bastante intrigantes, do tipo δ de Dirac concentrada em um ponto fixo repulsor e outras. Um dos objetivos aqui é verificar se comportamentos análogos ocorrem para o caso dos recobrimentos críticos do círculo. Em um trabalho em andamento [50], Genadi Levin, Grzegorz Swiatek e Edson Vargas estão concluindo a prova da existência de atratores selvagens para os recobrimentos críticos do círculo que possuem a combinatória de Fibonacci e α suficientemente grande. A resposta desta questão depende de estimativas mais finas do que as consideradas no caso unimodal.

(4) *Espaco de parâmetros.* Na década de 90 ([72],[71]) demonstrou-se que para a família (a um parâmetro) de aplicações quadráticas do intervalo há prevalência total, no sentido da medida de Lebesgue do espaço de parâmetros, de apenas dois tipos de fenômenos: *i)* existência de uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue e para a qual quase todo ponto do intervalo é genérico (fenômeno conhecido como "caos" ou estocasticidade); *ii)* existência de um ponto periódico hiperbólico atrator que absorve quase toda condição inicial do intervalo ("hiperbolicidade"). Também mostrou-se que o segundo caso forma um aberto e denso do espaço de parâmetros ([70], [53]), embora já se soubesse desde a década de 80 que o primeiro aparece com medida de Lebesgue positiva ([62]).

Hoje já há generalizações desses resultados para famílias unimodais analíticas (e até famílias genéricas de classe C^r) com ponto crítico quadrático ([9]), demonstradas sempre com e a partir de técnicas de análise complexa. No entanto, essas técnicas ainda não se mostraram eficientes para lidar com uma criticalidade de ordem fracionária. Um exemplo típico é a família de famílias $a\,(1 - |2x - 1|^{\alpha})$, onde para cada α tem-se uma família de funções unimodais (com parâmetro a) do intervalo $[0, 1]$, que coincide com a família quadrática quando $\alpha = 2$. Em [28], Colli e Pinheiro mostraram, ainda no contexto de criticalidades quadráticas, mas com técnicas reais e com baixa regularidade nas hipóteses (C^3), que em desdobramentos transversais de bifurcações de Misiurewicz (homoclínicas) há prevalência total de caoticidade e renormalização, baseados num resultado anterior de Colli ([26]). Atualmente, viram que a demonstração pode ser adaptada (e até simplificada) para criticalidades de ordem entre 1 e 2 (usando o decaimento de geometria mostrado por W. Shen na pré-publicação intitulada *"Decay of geometry for unimodal maps: an elementary proof"*), no mesmo contexto, resultado que ainda precisa ser escrito. Nesse *front*, acreditam que possam provar que, em famílias $a\,(1 - |2x - 1|^\alpha)$, com α fixo e perto de 1, haja prevalência total de caoticidade e renormalização. A meta seguinte será aplicar as técnicas indutivamente em renormalizações consecutivas para obter prevalência de caoticidade e hiperbolicidade, como já se sabe no caso da família quadrática. As mesmas técnicas poderiam ser usadas em famílias de recobrimentos do círculo com um ponto crítico, de ordem entre 1 e 2, desde que se consiga mostrar o decaimento de geometria. Como comentado acima, há dificuldades inerentes à falta de simetria que têm que ser superadas tanto no que se refere às estimativas do espaço de configurações quanto àquelas do espaço de parâmetros. Por outro lado, esse tipo de família tem a vantagem de não apresentar o fenômeno de renormalização.

3.4.2. *Dinâmica complexa.*

(1) *Grupos de Thompson e espaços de Teichmüller.* Nesta parte do projeto, E. de Faria pretende dar continuidade ao trabalho em colaboração com Frederick Gardiner (CUNY) e William Harvey (King's College, London) cujo objetivo é estudar as conexões entre um objeto puramente algébrico, o chamado grupo de Thompson, e certos espacos de Teichmüller advindos da teoria dos sistemas dinâmicos complexos. Tal estudo foi iniciado em [41]. Mais especificamente, o plano de ação será o seguinte: (a) desenvolver uma teoria geral de superfícies de Riemann duais para sistemas dinâmicos conformes expansivos; (b) provar que o grupo de Thompson é o grupo de todos os automorfismos do espaço de Teichmüller dos endomorfismos uniformemente assintoticamente conformes (u.a.c.) de grau dois do conjunto de Cantor; (c) resolver o problema análogo para endomorfismos u.a.c. de grau dois do círculo unitário; (d) descrever grupos análogos ao grupo de Thompson para sistemas dinâmicos mais gerais.
(2) *Dinâmica holomorfa em $\mathbb{C}^*$.* A dinâmica de funções holomorfas ou meromorfas transcendentes é um tópico reconhecidamente difícil que vem recebendo mais atenção em anos recentes (veja o *survey* de W. Bergweiler [14]). Em trabalho conjunto, E. de Faria e Linda Keen (CUNY) pretendem estudar as propriedades dissipativas da dinâmica de transformações holomorfas de $\mathbb{C}^*$ (plano complexo menos a origem) nos respectivos conjuntos de Julia, com vistas a aplicações, como por exemplo, à diâmica dos chamados pares comutantes holomorfos.

4. Grupo de Pesquisa

Eduardo Colli, André de Carvalho, Edson de Faria, Albert Fisher, Daniel Panazzolo, Pedro Salomão, Fabio Tal, Edson Vargas, Salvador Zanata.

5. Colaboradores

Welington de Melo, Grzegorz Swiatek, Genadi Levin, Jacek Grazyck, Sebastian van Strien, Daniel Smania, Carlos Gutierrez, Marco Martens, Juan Rivera Letellier, Paulo Agozzini, Clodoaldo Ragazzo, Patrice Le Calvez, Frédéric Le Roux, Fernando Oliveira, Mario Jorge Dias Carneiro, Toby Hall, Miguel Paternain, Frederick Gardiner, Linda Keen, William Harvey, Alberto Pinto, Mikhail Lyubich, Julio Rebelo, Ana Lucia da Silva, John Hubbard, Jeremy Kahn, Aldo Portela, Meiyu Su, Saeed Zakeri, Artur Lopes, Enrique Pujals, Kostya Khanin, Robert Roussarie, Freddy Dumortier, Felipe Cano, Abderaouf Mourtada, Vilton Pinheiro.

Referências

[1] S. Addas-Zanata. On the existence of a new type of periodic and quasi-periodic orbits for twist maps of the torus. *Nonlinearity*, 15(5):1399–1416, 2002.

[2] S. Addas-Zanata. On properties of the vertical rotation interval for twist mappings. II. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 4(2):125–137 (2004), 2003.

[3] S. Addas-Zanata. Instability for the rotation set of homeomorphisms of the torus homotopic to the identity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(2):319–328, 2004.

[4] S. Addas-Zanata. A note on a standard family of twist mappings. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 5(1):1–9, 2004.

[5] S. Addas-Zanata. On properties of the vertical rotation interval for twist mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(3):641–660, 2005.

[6] S. Addas-Zanata. Some extensions of the Poincaré-Birkhoff theorem to the cylinder and a remark on mappings of the torus homotopic to Dehn twists. *Nonlinearity*, 18(5):2243–2260, 2005.

[7] S. Addas-Zanata. Stability for the vertical rotation interval of twist mappings. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 14(4):631–642, 2006.

[8] S. Addas-Zanata and C. Grotta-Ragazzo. On the stability of some periodic orbits of a new type for twist maps. *Nonlinearity*, 15(5):1385–1397, 2002.

[9] A. Avila, M. Lyubich, and W. de Melo. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. *Invent. Math.*, 154(3):451–550, 2003.

[10] E. Bedford and J. Smillie. External rays in the dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$. In *Complex geometric analysis in Pohang (1997)*, pages 41–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[11] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math. (2)*, 133(1):73–169, 1991.

[12] M. Benedicks and L.-S. Young. Sinaĭ-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps. *Invent. Math.*, 112(3):541–576, 1993.

[13] M. Benedicks and L.-S. Young. Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps. *Astérisque*, (261):xi, 13–56, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[14] W. Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 29(2):151–188, 1993.

[15] M. L. Bertotti and S. V. Bolotin. Kinetic energy and Lyapunov stability of equilibria of natural Lagrangian systems. In *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)*, pages 1155–1157. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[16] M. L. Bertotti and S. V. Bolotin. On the influence of the kinetic energy on the stability of equilibria of natural Lagrangian systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 152(1):65–79, 2000.

[17] G. D. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14(1):14–22, 1913.

[18] G. D. Birkhoff. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43, 1920.

[19] G. D. Birkhoff. An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.*, 47, 1925.

[20] G. D. Birkhoff. Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bull. Soc. Math. France*, 60:1–26, 1932.
[21] C. Bonatti and S. Crovisier. Récurrence et généricité. *Invent. Math.*, 158(1):33–104, 2004.
[22] L. Bordignon and E. Vargas. Decay of geometry for fibonacci cubic polynomials. Em preparação.
[23] P. L. Boyland. Bifurcations of circle maps: Arnol′d tongues, bistability and rotation intervals. *Comm. Math. Phys.*, 106(3):353–381, 1986.
[24] G. T. Buzzard and J. E. Fornæss. Compositional roots of Hénon maps. In *Geometric complex analysis (Hayama, 1995)*, pages 67–73. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.
[25] E. Colli. Infinitely many coexisting strange attractors. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(5):539–579, 1998.
[26] E. Colli. A starting condition approach to parameter distortion in generalized renormalization. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2(2):221–288, 2001.
[27] E. Colli, V. S. M. Piassi, A. Tufaile, and J. C. Sartorelli. Bistability in bubble formation. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 70(6):066215, 2004.
[28] E. Colli and V. Pinheiro. Chaos versus renormalization at quadratic S-unimodal Misiurewicz bifurcations. *Astérisque*, (286):xx, 257–308, 2003. Geometric methods in dynamics. I.
[29] E. Colli and E. Vargas. Non-trivial wandering domains and homoclinic bifurcations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(6):1657–1681, 2001.
[30] C. C. Conley and E. Zehnder. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol′d. *Invent. Math.*, 73(1):33–49, 1983.
[31] A. de Carvalho. Pruning fronts and the formation of horseshoes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):851–894, 1999.
[32] A. de Carvalho and T. Hall. The forcing relation for horseshoe braid types. *Experiment. Math.*, 11(2):271–288, 2002.
[33] A. de Carvalho and T. Hall. Conjugacies between horseshoe braids. *Nonlinearity*, 16:1329–1338, 2003.
[34] A. de Carvalho and T. Hall. Braid forcing and star-shaped train tracks. *Topology*, 43:247–287, 2004.
[35] A. de Carvalho, M. Lyubich, and M. Martens. Renormalization in the Hénon family. I. Universality but non-rigidity. *J. Stat. Phys.*, 121(5-6):611–669, 2005.
[36] E. de Faria. Asymptotic rigidity of scaling ratios for critical circle mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):995–1035, 1999.
[37] E. de Faria and W. de Melo. Rigidity of critical circle mappings. I. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(4):339–392, 1999.
[38] E. de Faria and W. de Melo. Rigidity of critical circle mappings. II. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(2):343–370, 2000.
[39] E. de Faria, W. de Melo, and A. Pinto. Global hyperbolicity of renormalization for C^r unimodal mappings. To appear.
[40] E. de Faria, W. de Melo, P. Salomão, and E. Vargas. A full family of polynomial maps on the circle. In preparation.
[41] E. de Faria, F. P. Gardiner, and W. J. Harvey. Thompson's group as a Teichmüller mapping class group. In *In the tradition of Ahlfors and Bers, III*, volume 355 of *Contemp. Math.*, pages 165–185. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
[42] V. J. Donnay. Geodesic flow on the two-sphere. I. Positive measure entropy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8(4):531–553, 1988.
[43] V. J. Donnay. Geodesic flow on the two-sphere. II. Ergodicity. In *Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87)*, volume 1342 of *Lecture Notes in Math.*, pages 112–153. Springer, Berlin, 1988.
[44] F. Dumortier, R. Roussarie, and J. Sotomayor. Bifurcations of cuspidal loops. *Nonlinearity*, 10(6):1369–1408, 1997.
[45] J. Écalle. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac.* Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1992.
[46] M. Flucher. Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms. *Manuscripta Math.*, 68(3):271–293, 1990.

[47] J. E. Fornæss and N. Sibony. Dynamics of $\mathbb{P}^2$ (examples). In *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, pages 47–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[48] J. Franks. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8*(Charles Conley Memorial Issue):99–107, 1988.

[49] J. Franks. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. *Invent. Math.*, 108(2):403–418, 1992.

[50] G. Świątek G. Levin and E. Vargas. Structure of attractors for critical coverings of the circle. Em preparação.

[51] M. V. P. Garcia and F. A. Tal. Stability of equilibrium of conservative systems with two degrees of freedom. *J. Differential Equations*, 194(2):364–381, 2003.

[52] M. V. P. Garcia and F. A. Tal. The influence of the kinetic energy in equilibrium of Hamiltonian systems. *J. Differential Equations*, 213(2):410–417, 2005.

[53] J. Graczyk and G. Światek. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann. of Math. (2)*, 146(1):1–52, 1997.

[54] C. Grotta-Ragazzo and P. A. S. Salomão. Global surfaces of section in non-regular convex energy levels of Hamiltonian systems. A aparecer em Math. Z.

[55] C. Grotta-Ragazzo and P. A. S. Salomão. The Conley-Zehnder index and the saddle-center equilibrium. *J. Differential Equations*, 220(1):259–278, 2006.

[56] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[57] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.*, 50(1):69–77, 1976.

[58] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 148(1):197–289, 1998.

[59] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics. *Ann. of Math. (2)*, 157(1):125–255, 2003.

[60] J. Hubbard and R. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials. In *Real and complex dynamical systems (Hillerød, 1993)*, pages 89–132. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[61] Yu. S. Il′yashenko. *Finiteness theorems for limit cycles*, volume 94 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by H. H. McFaden.

[62] M. V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 81(1):39–88, 1981.

[63] A. G. Khovanskiĭ. *Fewnomials*, volume 88 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska.

[64] O. E. Lanford, III. Renormalization group methods for circle mappings. In *Statistical mechanics and field theory : mathematical aspects (Groningen, 1985)*, volume 257 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 176–189. Springer, Berlin, 1986.

[65] O. E. Lanford, III. Renormalization group methods for critical circle mappings with general rotation number. In *VIIIth international congress on mathematical physics (Marseille, 1986)*, pages 532–536. World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[66] O. E. Lanford, III. Renormalization group methods for circle mappings. In *Nonlinear evolution and chaotic phenomena (Noto, 1987)*, volume 176 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, pages 25–36. Plenum, New York, 1988.

[67] P. Le Calvez. Une généralisation du théorème de Conley-Zehnder aux homéomorphismes du tore de dimension deux. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(1):71–86, 1997.

[68] P. Le Calvez. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(1):139–171, 2003.

[69] R. Lozi. Strange attractors: a class of mappings of $\mathbb{R}^2$ which leaves some Cantor sets invariant. In *Intrinsic stochasticity in plasmas (Internat. Workshop, Inst. Études Sci. Cargèse, Cargèse, 1979)*, pages 373–381. École Polytech., Palaiseau, 1979.

[70] M. Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials. I, II. *Acta Math.*, 178(2):185–247, 247–297, 1997.

[71] M. Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials. III. Parapuzzle and SBR measures. *Astérisque*, (261):xii–xiii, 173–200, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[72] M. Lyubich. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann. of Math. (2)*, 156(1):1–78, 2002.

[73] R. S. MacKay. *Renormalisation in area-preserving maps*, volume 6 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1993.

[74] M. Martens and T. Nowicki. Invariant measures for typical quadratic maps. *Astérisque*, (261):xiii, 239–252, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[75] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4):469–523, 1980.

[76] L. Mora and M. Viana. Abundance of strange attractors. *Acta Math.*, 171(1):1–71, 1993.

[77] J. Moser. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11:257–271, 1958.

[78] A. Mourtada. Projection de sous-ensembles quasi-regulieres d'Hilbert I-III. Preprint Dijon, 2003.

[79] S. Östlund, D. Rand, J. Sethna, and E. Siggia. Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems. *Phys. D*, 8(3):303–342, 1983.

[80] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, (261):xiii–xiv, 335–347, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[81] D. Panazzolo. On the existence of canard solutions. *Publ. Mat.*, 44(2):503–592, 2000.

[82] D. Panazzolo. Resolution of singularities of vector fields in dimension three. http://arXiv.org:math/0506209, 2005. Preprint.

[83] P. H. Rabinowitz. Periodic solutions of Hamiltonian systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(2):157–184, 1978.

[84] D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna, and E. D. Siggia. Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2):132–135, 1982.

[85] C. L. Siegel and J. Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1971. Translation by Charles I. Kalme, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 187.

[86] D. Sullivan. Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. In *American Mathematical Society centennial publications, Vol. II (Providence, RI, 1988)*, pages 417–466. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[87] D. Sullivan. Linking the universalities of Milnor-Thurston, Feigenbaum and Ahlfors-Bers. In *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, pages 543–564. Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[88] G. Świątek and E. Vargas. Decay of geometry in the cubic family. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(5):1311–1329, 1998.

[89] J.-Cl. Tougeron. Sur les ensembles semi-analytiques avec conditions Gevrey au bord. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27(2):173–208, 1994.

[90] S. van Strien and E. Vargas. Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(4):749–782 (electronic), 2004.

[91] E. Vargas. Measure of minimal sets of polymodal maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(1):159–178, 1996.