INTRODUÇÃO À COMPUTAÇÃO QUÂNTICA - PARTE 4

Aula passada

- Representação de 1 qubit - Esfera de Bloch
- Algoritmo de Deutsch
- Implementação em Qiskit

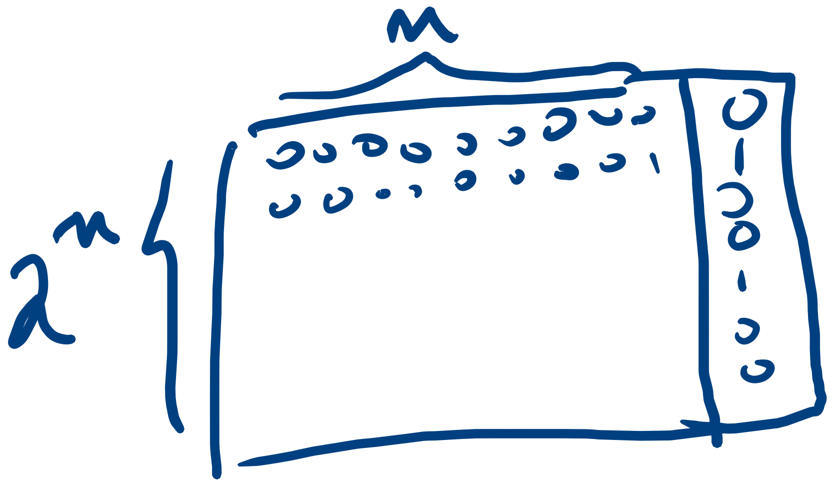
Hoje

- Algoritmo de Deutsch-Jozsa
- Algoritmo de Grover

PROBLEMA Dada uma função $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, decidir se f é balanceada ou constante

PROMESSA A f dada é ou balanceada ou constante.

Há 2^{2^n} funções $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$



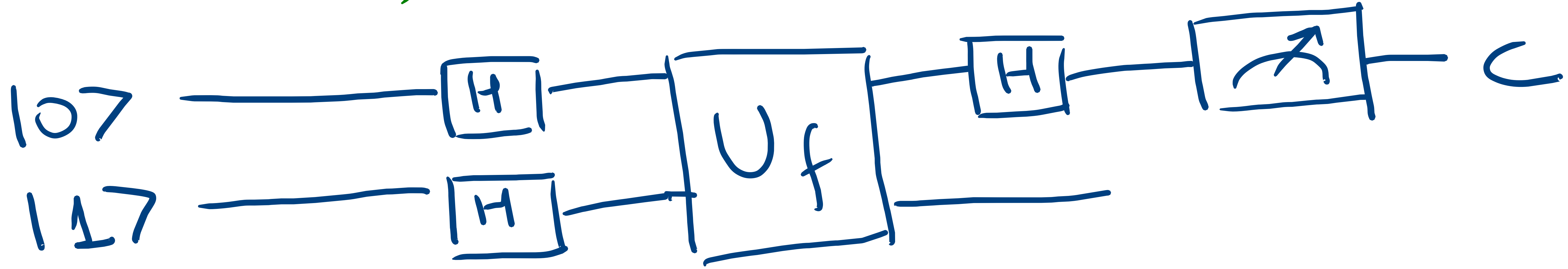
2 constantes

$\binom{2^n}{2^n/2}$ balanceadas

Nem cte nem bal

O Algoritmo de Deutsch-Jozsa é uma generalização do Algo. Deutsch para n bits

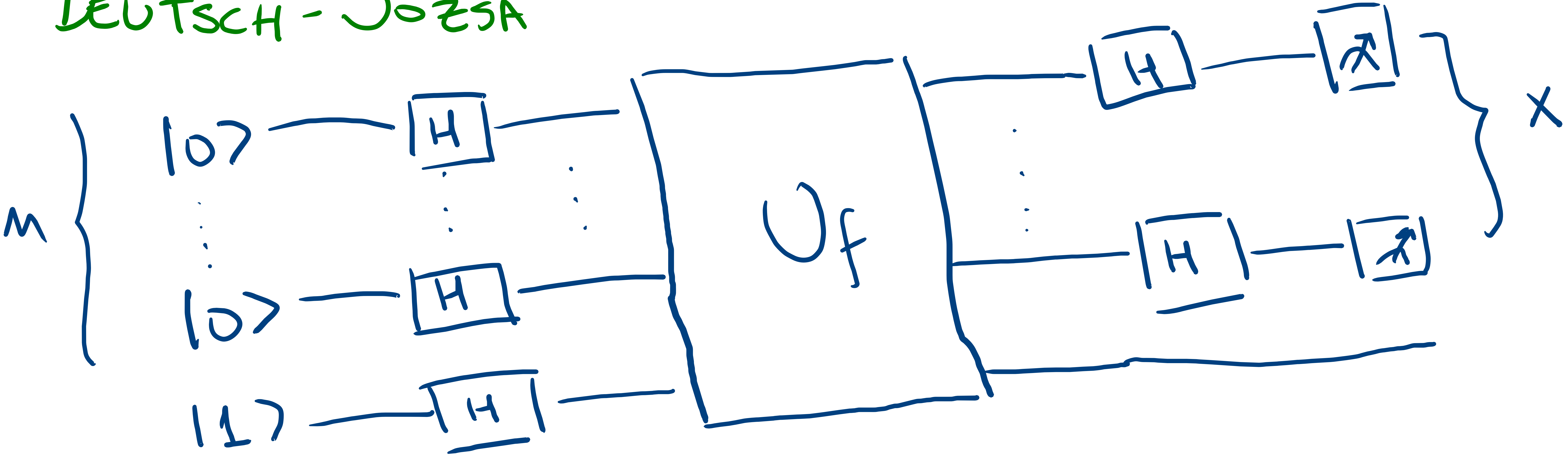
DEUTSCH ($n=1$)



se $c = 0 \Rightarrow f$ cte , se $c = 1 \Rightarrow f$ balanceada

O Algoritmo de Deutsch-Jozsa é uma generalização do Algo. Deutsch para n bits

DEUTSCH-JOZSA



Se $x = \underbrace{000\ldots0}_{n} \Rightarrow f$ cte Senão f balanceada.

DEM Primeiro analizemos a porta de Hadamard em n qubits

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H[i,j] = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{i \wedge j}$$

i	j	$i \wedge j$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} j=0 & \quad j=1 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=0 \\ i=1 \end{array} & \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H^{\otimes 2} = H \otimes H =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \\ i=0 \\ i=1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j=0 & j=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} \end{array} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \\ i=0 \\ i=1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j=0 & j=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2} \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} & (-1)^{0 \wedge 1} \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} \\ (-1)^{1 \wedge 0} \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} & (-1)^{1 \wedge 1} \begin{bmatrix} (-1)^{0 \wedge 0} & (-1)^{0 \wedge 1} \\ (-1)^{1 \wedge 0} & (-1)^{1 \wedge 1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{bmatrix} & (-1)^{0\wedge 1} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{bmatrix} \\ (-1)^{1\wedge 0} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{bmatrix} & (-1)^{1\wedge 1} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0 \oplus 0\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{0\wedge 0 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0 \oplus 1\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 1\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0 \oplus 0\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0 \oplus 1\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 1\wedge 1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2} \begin{bmatrix} (-1)^{0\wedge 0 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0 \oplus 0\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{0\wedge 0 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 0 \oplus 1\wedge 1} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{0\wedge 1 \oplus 1\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0 \oplus 0\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 0\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 0\wedge 1} \\ (-1)^{1\wedge 0 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 0 \oplus 1\wedge 1} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 1\wedge 0} & (-1)^{1\wedge 1 \oplus 1\wedge 1} \end{bmatrix}$$

Lembre do produto escalar binário : $\langle 01, 11 \rangle = 0\wedge 1 \oplus 1\wedge 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2} \begin{bmatrix} (-1)^{\langle 00,00\rangle} & (-1)^{\langle 00,01\rangle} & (-1)^{\langle 00,10\rangle} & (-1)^{\langle 00,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 01,00\rangle} & (-1)^{\langle 01,01\rangle} & (-1)^{\langle 01,10\rangle} & (-1)^{\langle 01,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 10,00\rangle} & (-1)^{\langle 10,01\rangle} & (-1)^{\langle 10,10\rangle} & (-1)^{\langle 10,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 11,00\rangle} & (-1)^{\langle 11,01\rangle} & (-1)^{\langle 11,10\rangle} & (-1)^{\langle 11,11\rangle} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^2}\begin{bmatrix} (-1)^{\langle 00,00\rangle} & (-1)^{\langle 00,01\rangle} & (-1)^{\langle 00,10\rangle} & (-1)^{\langle 00,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 01,00\rangle} & (-1)^{\langle 01,01\rangle} & (-1)^{\langle 01,10\rangle} & (-1)^{\langle 01,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 10,00\rangle} & (-1)^{\langle 10,01\rangle} & (-1)^{\langle 10,10\rangle} & (-1)^{\langle 10,11\rangle} \\ (-1)^{\langle 11,00\rangle} & (-1)^{\langle 11,01\rangle} & (-1)^{\langle 11,10\rangle} & (-1)^{\langle 11,11\rangle} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad H^{\otimes 2}[i,j] = \frac{1}{\sqrt{2}^2}(-1)^{\langle i,j\rangle}$$

indução

$$\Longrightarrow \quad H^{\otimes n}[i,j] = \frac{1}{\sqrt{2}^n}(-1)^{\langle i,j\rangle}$$

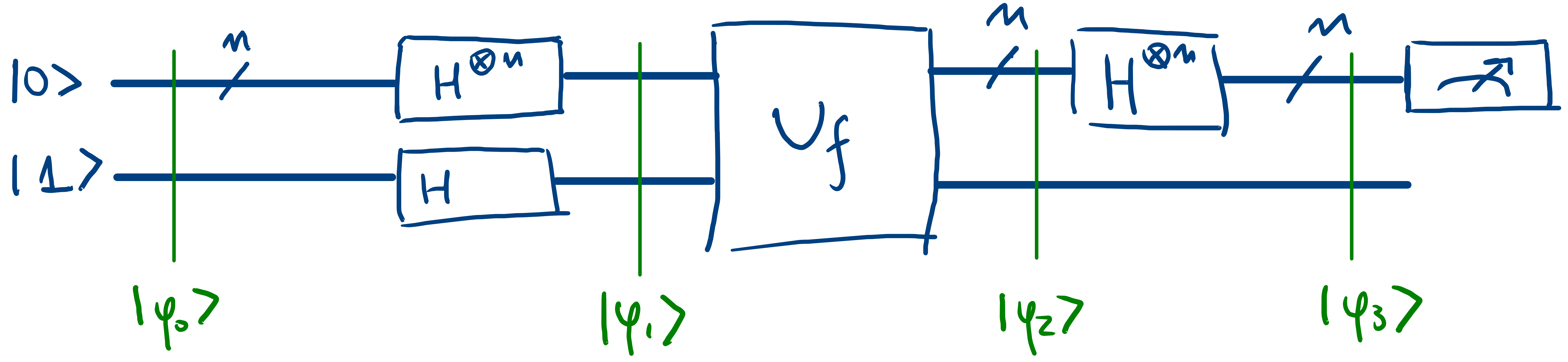
Seja $|x\rangle$ um estado básico (não superposição)

$H^{\otimes n}|x\rangle$ corresponde à x-ésima coluna de $H^{\otimes n}$

$$\Rightarrow H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y\in\{0,1\}^n} (-1)^{\langle y,x\rangle}\,|y\rangle$$

- $$H^{\otimes n} = \begin{array}{c} \text{coluna } x \\ \left[\begin{array}{ccc} \text{---} & \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle 0,x\rangle} & \text{---} \\ \text{---} & \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle 1,x\rangle} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle n-1,x\rangle} & \text{---} \end{array}\right] \end{array}$$

Análise do Alg. Deutsch-Jozsa



- $|\varphi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$
- $|\varphi_1\rangle = \left(H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}\right) \otimes \left(H|1\rangle\right) =$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle\right)\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bullet\ |\varphi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bullet\ |\varphi_2\rangle = U_f |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt{2}} \left(\sum_{x \in \{0,1\}^n} \underbrace{U_f |x\rangle |0\rangle}_{|x\rangle|f(x)\rangle} - \sum_{x \in \{0,1\}^n} \underbrace{U_f |x\rangle |1\rangle}_{|x\rangle|1 \oplus f(x)\rangle} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt{2}} \left(\sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(|x\rangle |f(x)\rangle - |x\rangle |1 \oplus f(x)\rangle \right) \right)$$

$$\begin{cases} \text{se } f(x)=0 \Rightarrow |x\rangle|0\rangle - |x\rangle|1\rangle \\ \text{se } f(x)=1 \Rightarrow |x\rangle|1\rangle - |x\rangle|0\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x\rangle|f(x)\rangle - |x\rangle|1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(|0\rangle - |1\rangle \right)$$

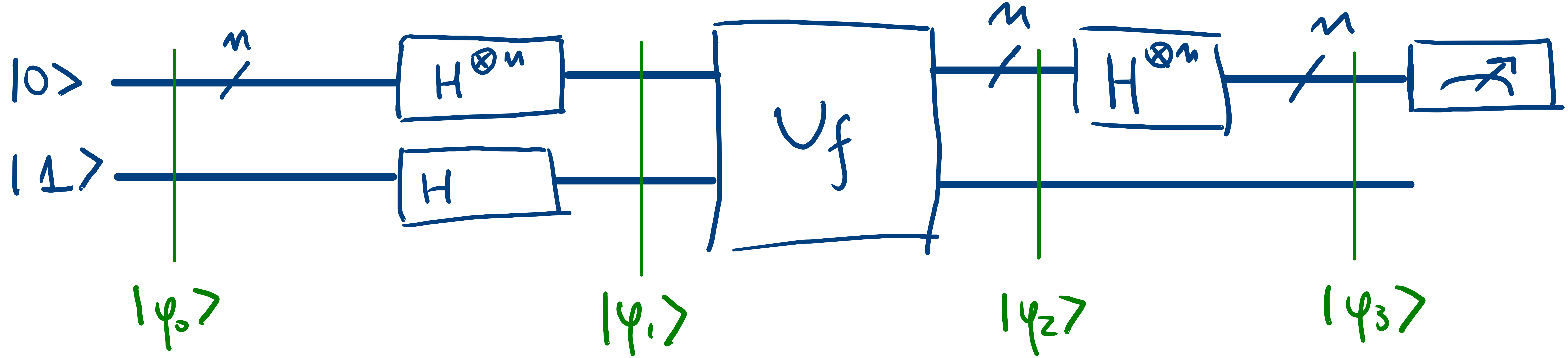
$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt{2}}\left(\sum_{x\in\{0,1\}^n}\left(|x\rangle|f(x)\rangle - |x\rangle|1\oplus f(x)\rangle\right)\right)$$

$$\Rightarrow |x\rangle|f(x)\rangle - |x\rangle|1\oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt{2}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}\left((-1)^{f(x)}|x\rangle\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}|x\rangle\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

• $$|\varphi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}|x\rangle\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$



Como o qubit auxiliar é sempre $= \left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$, podemos descartá-lo

$$|\varphi_3'\rangle = H^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}|x\rangle\right)\underbrace{\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{Descarte}}$$

$$|\varphi_3\rangle = H^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}|x\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\cdot\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}\left[H^{\otimes n}|x\rangle\right]$$

Vimos mais cedo que

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{y\in\{0,1\}^n}(-1)^{\langle y,x\rangle}|y\rangle$$

$$\Rightarrow |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\cdot\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}\left[\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{y\in\{0,1\}^n}(-1)^{\langle y,x\rangle}|y\rangle\right]$$

- $$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \cdot \sum_{x\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} \left[\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y\in\{0,1\}^n} (-1)^{\langle y,x\rangle} |y\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{x\in\{0,1\}^n} \sum_{y\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)\oplus\langle y,x\rangle} |y\rangle$$

- Qual a probabilidade de $|\varphi_3\rangle$ colapsar para $|0\rangle$?

Se

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{x\in\{0,1\}^n} \sum_{y\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)\oplus\langle y,x\rangle} |y\rangle$$

- Qual a probabilidade de $|\varphi_3\rangle$ colapsar para $|0\rangle$?

Seja α a amplitude de $|0\rangle$ em $|\varphi_3\rangle$

Como $|y\rangle = |0\rangle \Rightarrow \langle y,x\rangle = 0 \ \forall x$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{x\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)}$$

Mas

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} = \begin{cases} 2^n & \text{se } f(x) = 0 \ \forall x \\ -2^n & \text{se } f(x) = 1 \ \forall x \end{cases}$$

Ou seja, se f constante, observamos $|\varphi_3\rangle$ colapsar para $|0\rangle^{\otimes n}$ com 100% de prob.

Além disso

Mas $\displaystyle\sum_{x\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} = 0$ se f for balanceada

Então $|\varphi_3\rangle$ colapsa para $\neq |0\rangle^{\otimes n}$ com prob. 100% quando f é balanceada.

$\blacksquare$

QUANTUM SEARCH - ALGORITMO DE GROVER

Em computação clássica, buscar um elemento num espaço qualquer de N elementos toma N operações no pior caso.

Ex. Busca em array aleatório

$$[3, 5, 10, 12, 1, 2, 4]$$

Vamos ver um algoritmo quântico que resolve este problema em $O(\sqrt{N})$ operações.

Suponha que temos uma função f que RECONHECE SOLUÇÕES.

Se x_0 é solução da busca, então

$$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} \text{ tq } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

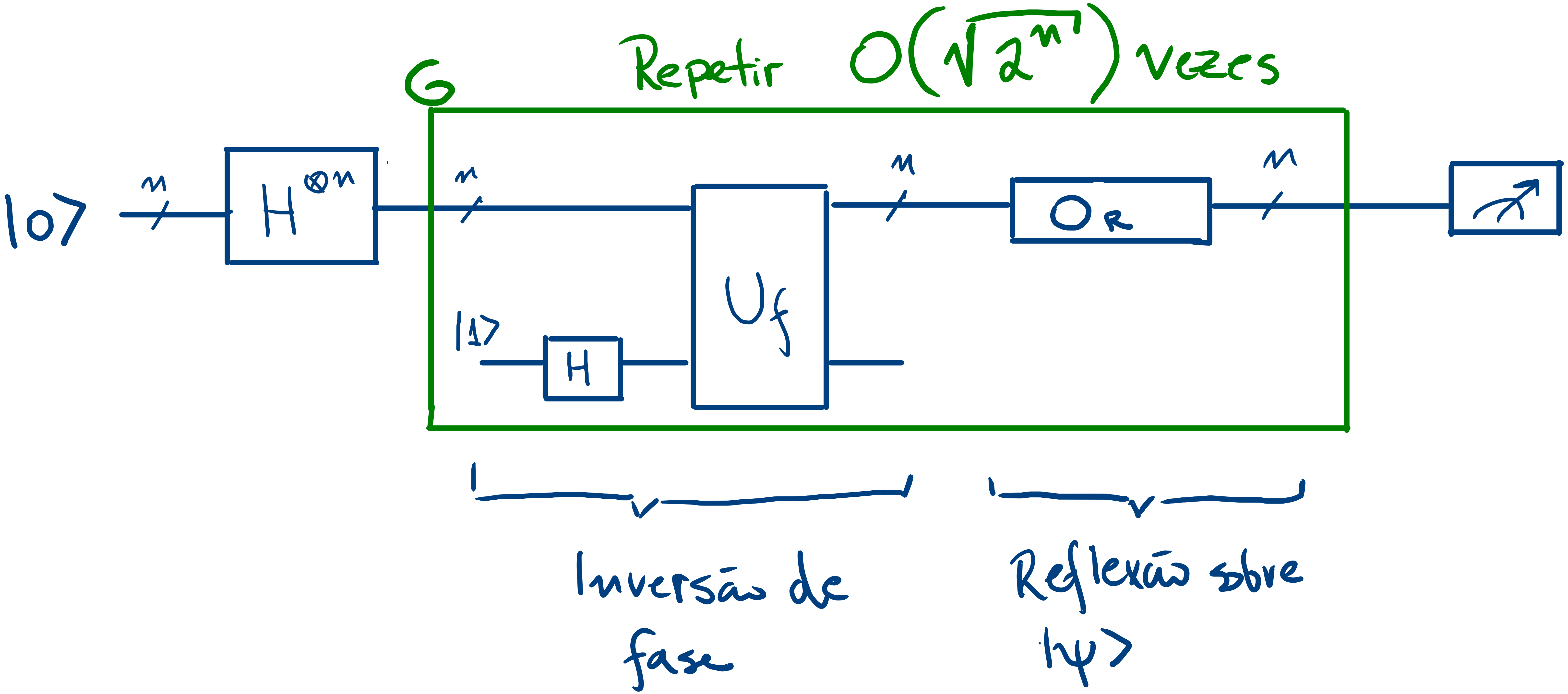
- No caso da busca por y num vetor V, temos $V[x_0]=y$
- Para um problema NP, $f(x)$ verifica se x é solução (certificado).

Suponha que f é dada na forma de um oráculo U_f que para qualquer estado básicos x de n qubits e y de 1 qubit

$$U_f|x,y\rangle = |x, f(x)\oplus y\rangle$$

A ideia do algoritmo de grover é usar U_f de um jeito esperto para amplificar a amplitude do estado $|x_0\rangle$.

Algo. Grover

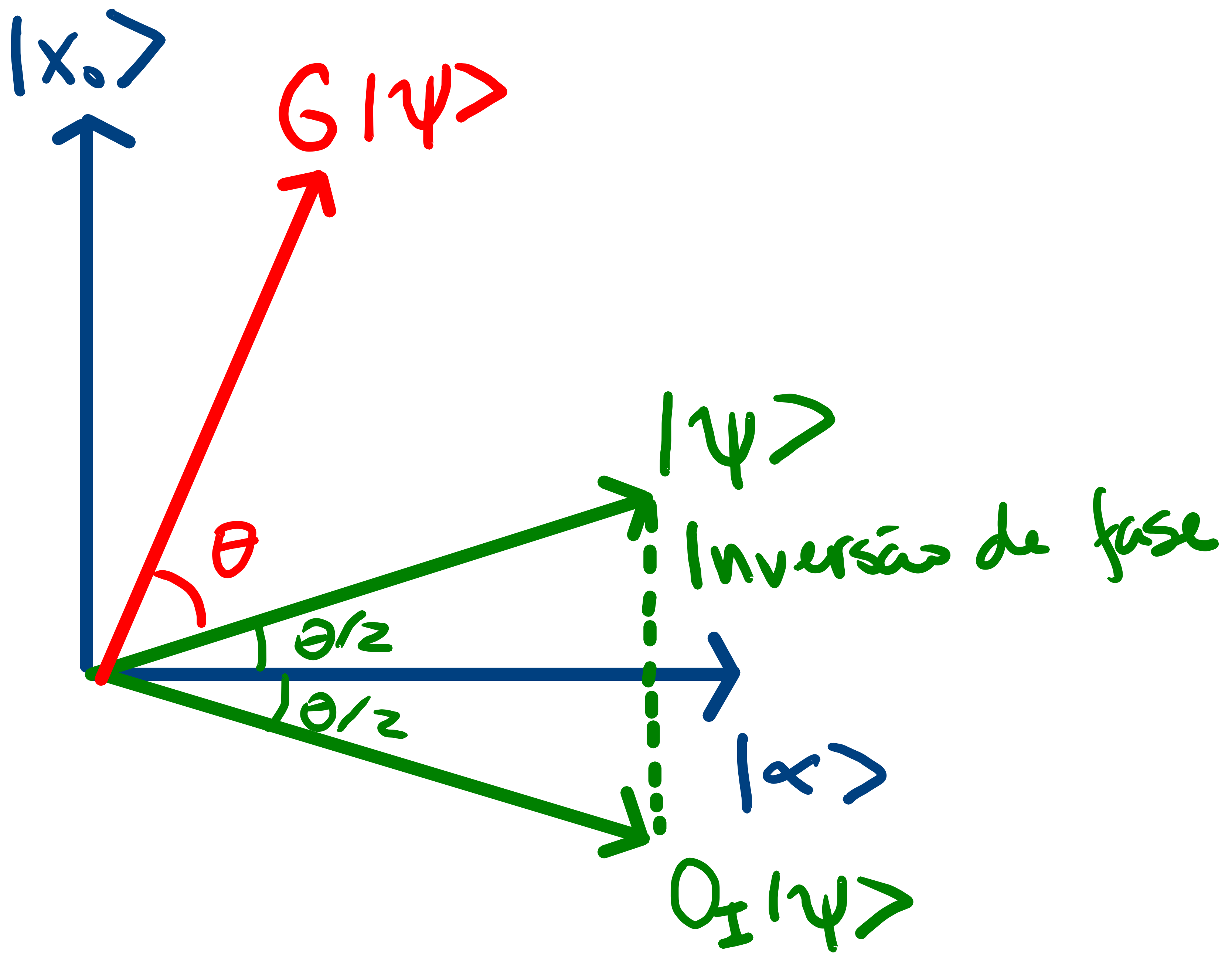


G
Repetir $O(\sqrt{2^n})$ vezes
$|0\rangle$
n
$H^{\otimes n}$
n
$|1\rangle$
H
U_f
n
O_R
n
Inversão de fase
Reflexão sobre $|\psi\rangle$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Seja $|\alpha\rangle$ a superposição dos x que não são solução

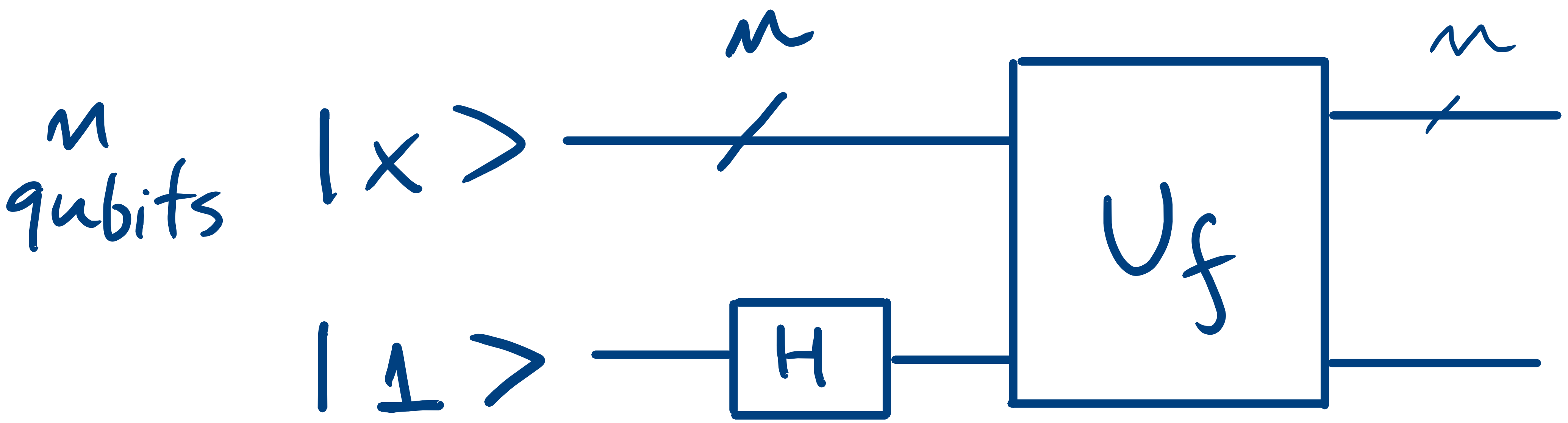
$$\Rightarrow |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n-1}} \sum_{x \neq x_0} |x\rangle$$



- Inicialmente $|\psi\rangle$ próximo de $|\alpha\rangle$
- A cada iteração se aproxima de $|x_0\rangle$
- Não pode fazer mais iterações que o necessário

INVERSÃO DE FASE

OI



Já vimos no Alg Deutsch-Jozsa que para $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$$U_f\left(|x\rangle H|1\rangle\right) = U_f\,|x\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (-1)^{f(x)}\,|x\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Interpretação da Inversão de fase

$$U_f\left(|x\rangle H|1\rangle\right) = (-1)^{f(x)}|x\rangle \underbrace{\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{Descarte}}$$

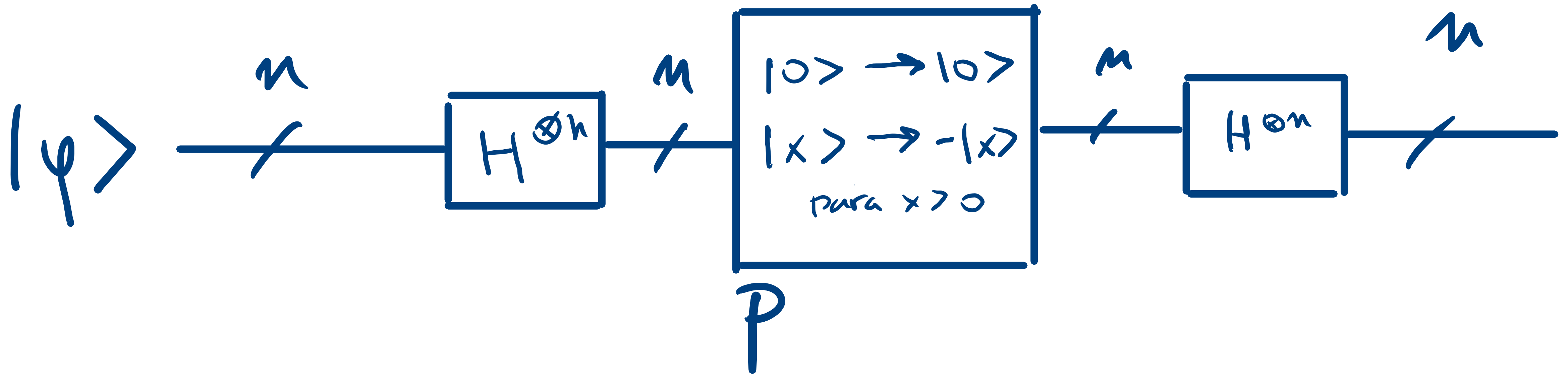
$$= \begin{cases} -|x\rangle & \text{se } x = x_0 \\ |x\rangle & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}$$

- Se $|\psi\rangle$ for uma superposição $\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right)$

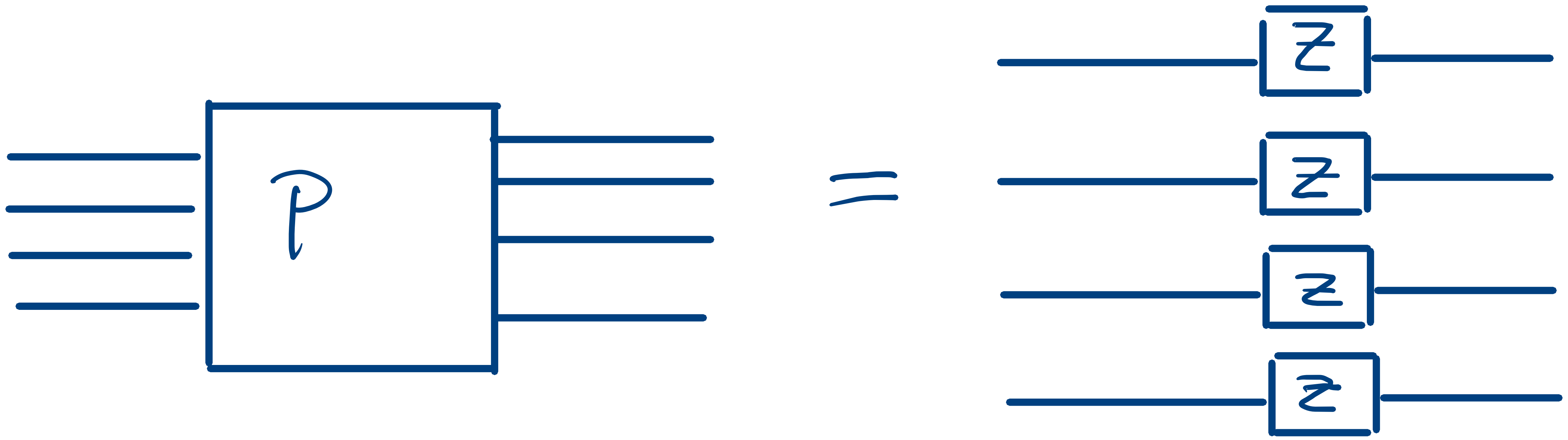
Sup que $x_0 = 3 = 11$

$$|\psi\rangle \xmapsto{\text{Inv. fase}} \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle \underline{- |11\rangle}\right)$$

Reflexão sobre $|\psi\rangle$: O_R



CUIDADO É preciso que todas as portas sejam implementadas eficientemente.



$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vejamos o efeito de P no registrador de n qubits

$$P = Z^{\otimes n} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - I = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - I$$

$$= 2|0\rangle\langle 0| - I$$

Portanto, o efeito de O_R é

$$O_R = H^{\otimes n} P H^{\otimes n} = H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I) H^{\otimes n}$$

$$= H^{\otimes n} 2|0\rangle\langle 0| H^{\otimes n} - H^{\otimes n} I H^{\otimes n}$$

$$= 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$, onde $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle$

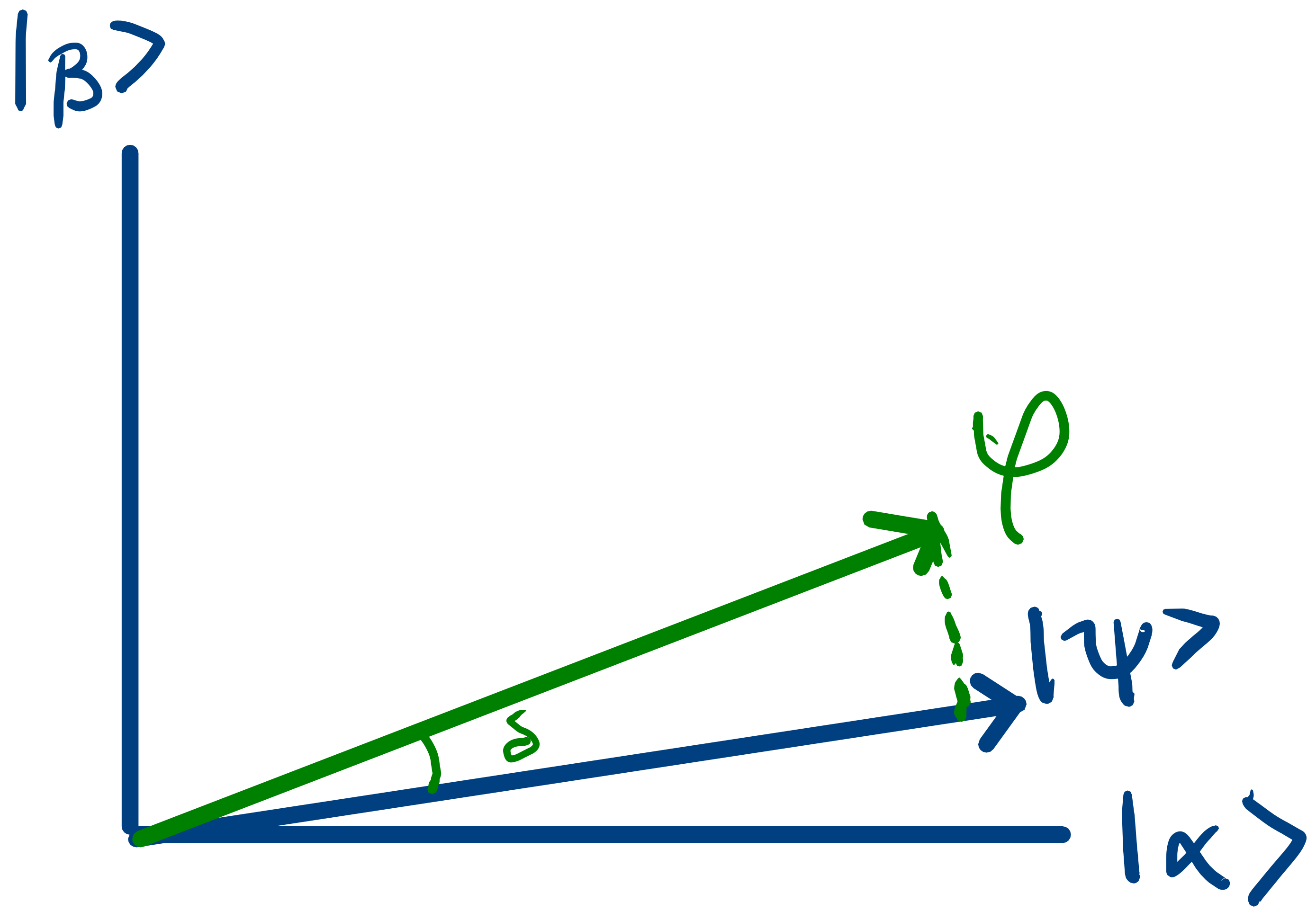
A aplicação de O_R em $|\varphi\rangle$ é

$$O_R|\varphi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)|\varphi\rangle$$
$$= 2|\psi\rangle\langle\psi,\varphi\rangle - |\varphi\rangle$$
$$= 2\langle\psi,\varphi\rangle\,|\psi\rangle - |\varphi\rangle$$

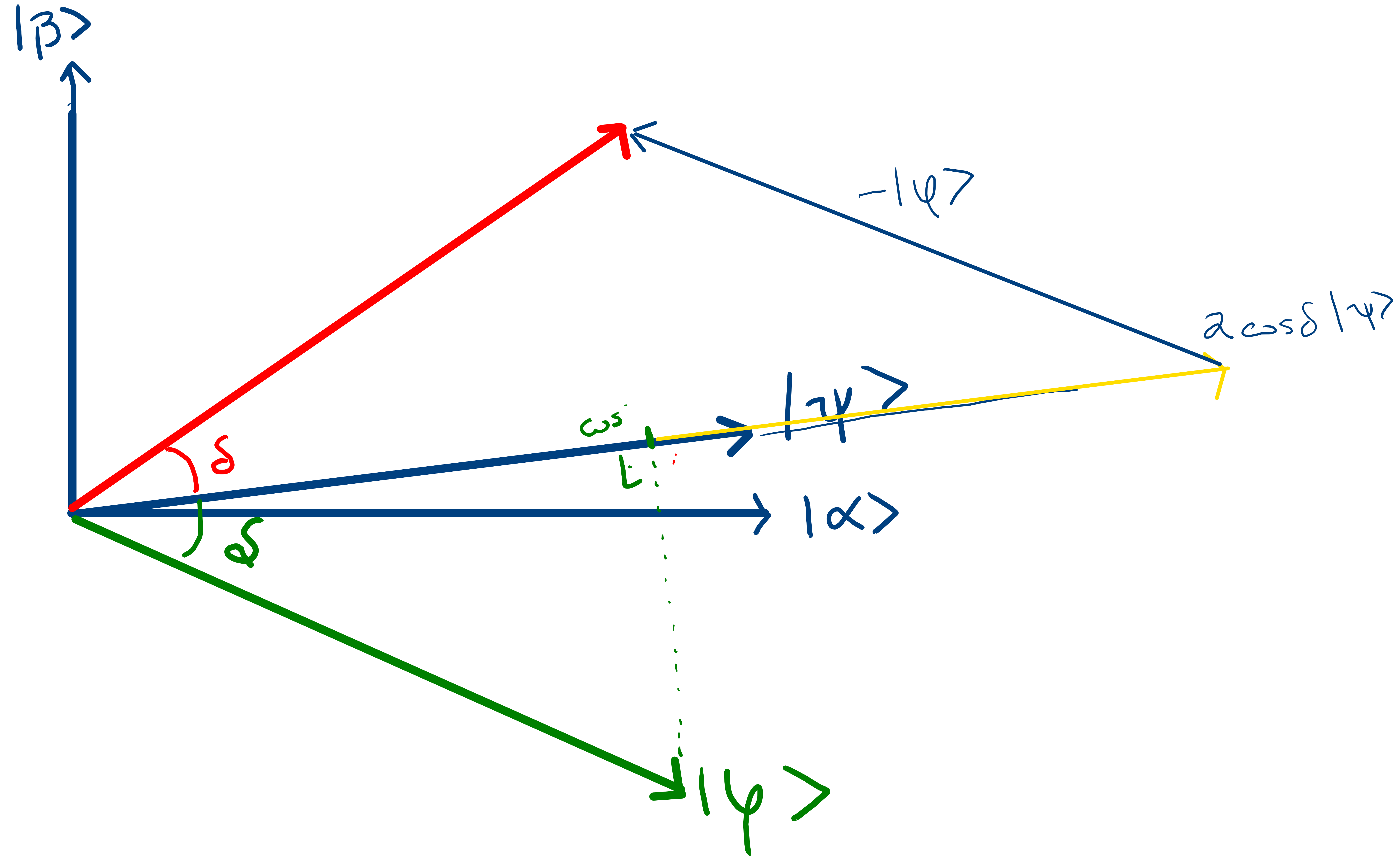
<u>Mas</u> $\langle\psi,\varphi\rangle = \underbrace{\|\psi\|}_{1}\underbrace{\|\varphi\|}_{1}.\cos\delta$

$$\Rightarrow \langle\psi,\varphi\rangle = \cos\delta$$

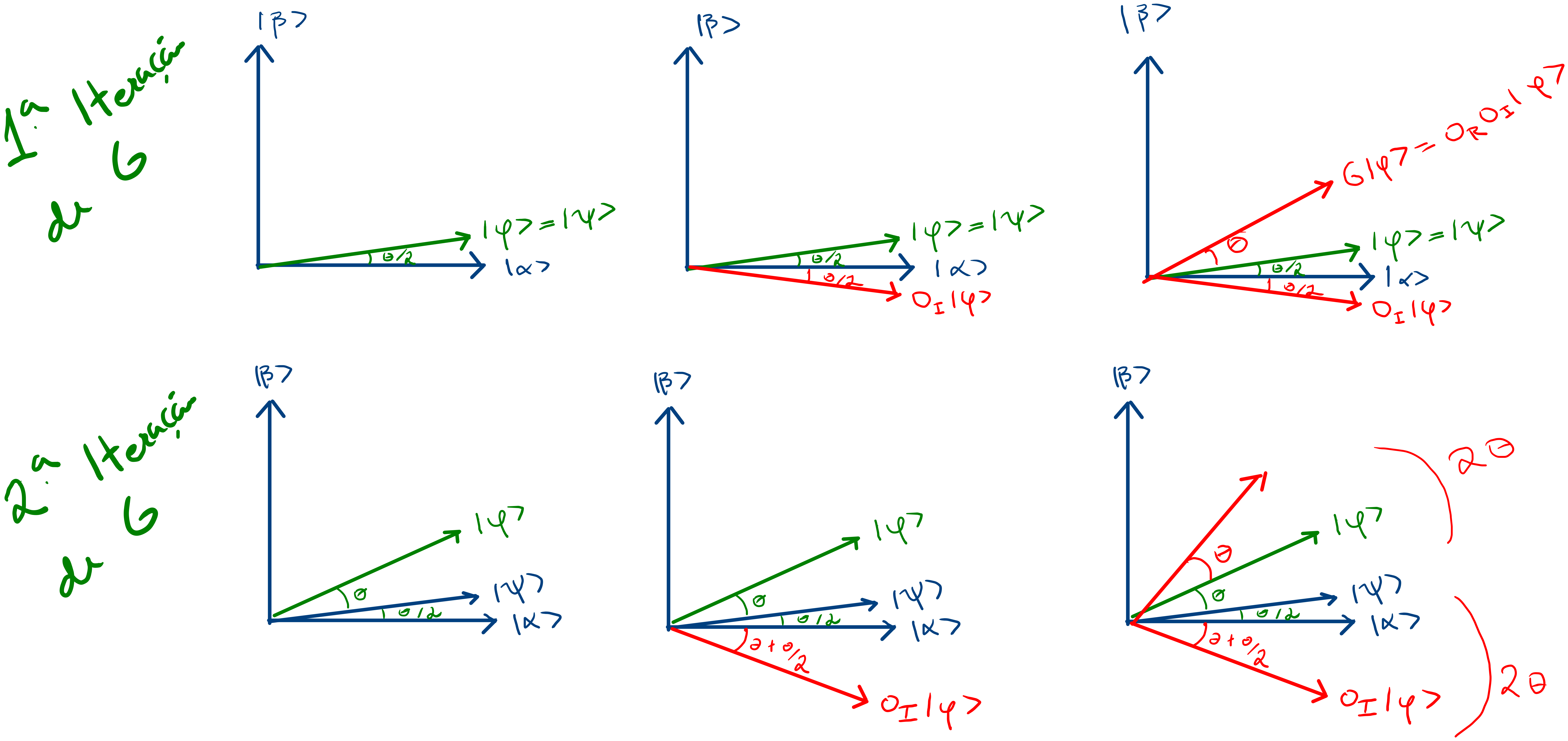
$$\Rightarrow O_R|\varphi\rangle = 2\cos\delta\,|\psi\rangle - |\varphi\rangle$$



$$O_R|\varphi\rangle = 2\cos\delta\,|\psi\rangle - |\varphi\rangle$$



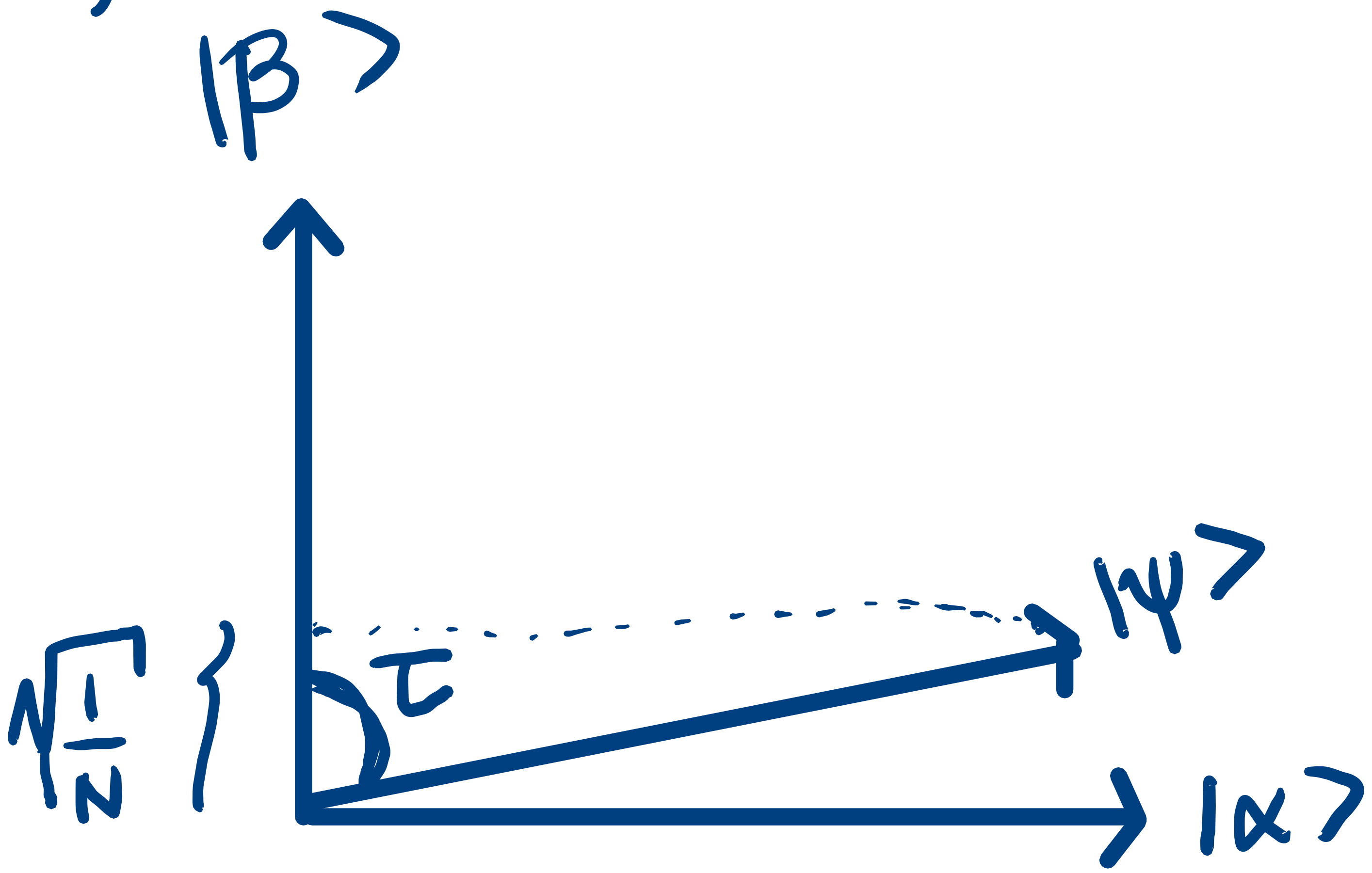
No início, $|\varphi\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle$



$\Rightarrow$ CADA ITERAÇÃO DE G rotaciona em ângulo de θ em direção a $|\beta\rangle$ = superposição de soluções $= |x_0\rangle$

Inicialmente $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}}\,|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{1}{N}}\,|\beta\rangle$

$(N = 2^n)$



$\Rightarrow \tau = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{N}}\right)$

$\Rightarrow$ Número de iterações $= R$

$$R \approx \frac{\tau}{\theta} = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{N}}\right)}{\theta}$$

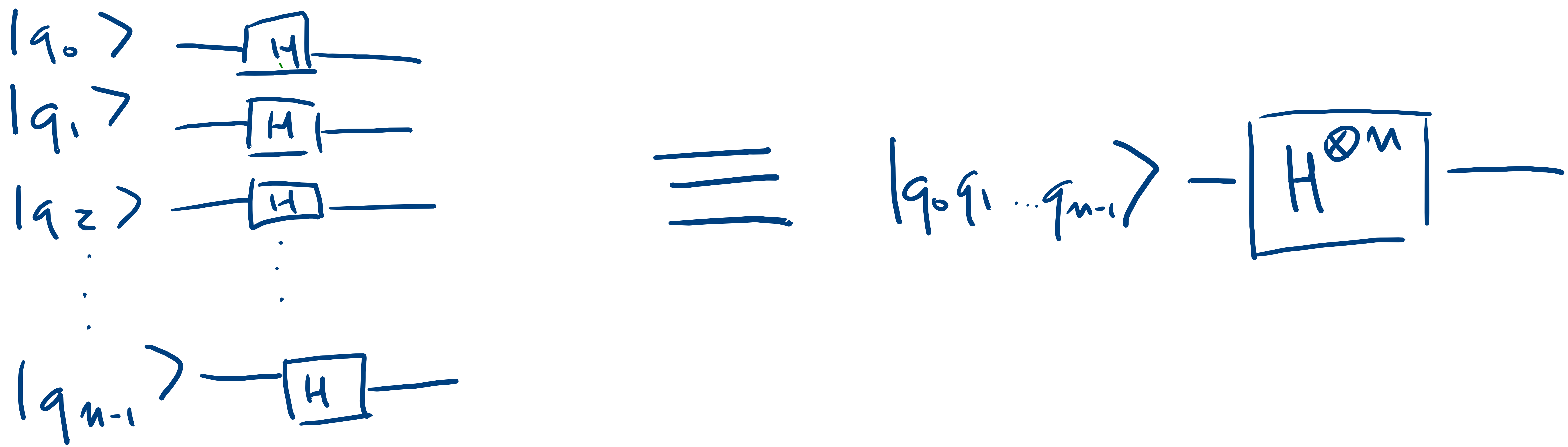
$$R \approx \frac{t}{\theta} = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{N}}\right)}{\theta}$$

$$\Rightarrow R = \left\lceil \frac{t}{\theta} \right\rceil \leqslant \frac{\pi/2}{\theta} = \frac{\pi}{2\theta}$$

Mas $\quad \frac{\theta}{2} \geqslant \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{N}}$

$$\Rightarrow R \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2^n}$$

$\blacksquare$



|q0>
|q1>
|q2>
|q_{n-1}>
H
H
H
H
≡
|q0 q1 ... q_{n-1}>
H^{⊗n}