PONTOS RACIONAIS

SEVERINO TOSCANO MELO

Numa das aulas de Geometria Analítica que lecionei para a Licenciatura em Física da USP, no primeiro semestre de 2011, expus o trecho do livro-texto [2] onde se mostra como se pode obter uma parametrização da circunferência usando funções racionais. Os alunos ficaram muito interessados quando perceberam o contraste que há entre a circunferência $x^2+y^2=1$, que possui abundantes pontos com ambas as coordenadas racionais, e as curvas $x^n+y^n=1$, com n inteiro maior que 2, que não possuem nenhum desses pontos além daqueles que estão sobre os eixos coordenados. Saber que é isto (a ausência de pontos racionais) o que diz o mítico teorema de Fermat foi para eles um motivo de alegria, muito parecida com a que eu senti quando vi esta parametrização pela primeira vez em [3], durante o meu primeiro curso de Cálculo, em 1977. Achei então que valeria a pena divulgar um pouco mais estas ideias.

1. Versão racional do "último teorema"

O leitor provavelmente já conhece o enunciado do chamado *último teorema de Fermat*, demonstrado pelo matemático britânico Andrew Wiles em 1994, mais de três séculos e meio depois de ter sido conjecturado por Fermat: se n é um inteiro maior que 2, então não existem inteiros positivos p, q e r tais que

$$p^n+q^n=r^n. \tag{1}$$

Este teorema tem a seguinte consequência: se n é um inteiro maior que 2, não existem números racionais ambos não-nulos x e y tais que

$$x^n+y^n=1. \tag{2}$$

De fato, se $x=p/r$ e $y=q/s$ satisfizessem (2), sendo p, q, r e s inteiros positivos, então teríamos

$$\frac{p^n}{r^n}+\frac{q^n}{s^n}=1, \quad \text{logo} \quad (ps)^n+(qr)^n=(rs)^n.$$

Isto é, existiriam inteiros positivos $j=ps$, $k=qr$ e $l=rs$ satisfazendo $j^n+k^n=l^n$. Absurdo! Isto prova que não existem x e y racionais e positivos satisfazendo (2). Para vermos que também chegamos a um absurdo se supusermos que (2) tem solução racional com x ou y negativos, precisamos considerar separadamente os casos n ímpar ou n par. Se n for par, e se (x,y) satisfizer (2), então $(|x|,|y|)$ também satisfará. Logo, se existissem x e y racionais ambos não-nulos satisfazendo (2), existiriam racionais positivos satisfazendo (2). Suponhamos agora que n é ímpar. É claro então que os pontos da curva (2) não podem ter ambas as coordenadas negativas. Se $x=-p/r$ e $y=q/s$, com p, q, r e s inteiros positivos, satisfizessem (2), então teríamos

$$-\frac{p^n}{r^n}+\frac{q^n}{s^n}=1, \quad \text{logo} \quad (ps)^n+(rs)^n=(qr)^n.$$

Isto é, existiriam inteiros positivos $j=ps$, $k=rs$ e $l=qr$ satisfazendo $j^n+k^n=l^n$. Absurdo! De maneira análoga chega-se a um absurdo supondo-se que existam racionais $x>0$ e $y<0$ satisfazendo (2).

Segue então do Teorema de Wiles que as curvas de equação $x^n+y^n=1$, onde n é inteiro maior que 2, conseguem evitar todos os pontos do plano cujas coordenadas sejam ambas racionais, exceto $(1,0)$, $(0,1)$ e, no caso em que n é par, $(-1,0)$ e $(0,-1)$. Isto parece bem surpreendente, uma vez que o conjunto dos pontos com ambas as coordenadas racionais formam um subconjunto *denso* do plano: qualquer pequeno disco (de raio positivo) contém infinitos desses *pontos racionais*.

É curioso notar o contraste com o caso $n=2$. Veremos em seguida que o conjunto dos pontos racionais da circunferência $x^2+y^2=1$ não só é infinito, mas tem interseção infinita com qualquer arco da circunferência, por menor que ele seja. Dizemos então que o conjunto dos pontos racionais da curva $x^2+y^2=1$ é *denso* na curva.

2. Pontos racionais da circunferência

Vejamos primeiro como se pode parametrizar a circunferência, menos um ponto, usando funções racionais.

Teorema 1. *Sejam f e g as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(t) = (1-t^2)/(1+t^2)$ e $g(t) = 2t/(t^2+1)$. A aplicação $t \mapsto (f(t), g(t))$ é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$ e $(x, y) \neq (-1, 0)$. Além disso, um ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ tem ambas as coordenadas racionais se, e somente se, t é racional.*

Demonstração: Fica para o leitor verificar que $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$ para todo t e que, portanto, a imagem da aplicação $t \mapsto (f(t), g(t))$ está de fato contida na circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Também é um cálculo bem direto verificar que $g(t)/[f(t) + 1] = t$ para todo t. Assim, se t_1 e t_2 são números reais tais que $(f(t_1), g(t_1)) = (f(t_2), g(t_2))$, então

$$t_1 = \frac{g(t_1)}{f(t_1)+1} = \frac{g(t_2)}{f(t_2)+1} = t_2.$$

Isto prova que a aplicação em questão é injetora.

Tomemos agora um ponto (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 1$ e $(x, y) \neq (-1, 0)$ e definamos $t = y/(x + 1)$. Mostremos que $(f(t), g(t)) = (x, y)$. Se $y = 0$, então x necessariamente será igual a 1, pois só há dois pontos na circunferência com $y = 0$ e um deles foi excluído a priori. Neste caso, $t = 0$ e $(f(0), g(0)) = (1, 0)$, como queríamos. Se $y \neq 0$, então $t \neq 0$ e $x = (y/t) - 1$. Substituindo esta igualdade na equação da circunferência, vem:

$$\left(\frac{y}{t} - 1\right)^2 + y^2 \;=\; \frac{y^2}{t^2} - \frac{2y}{t} + 1 + y^2 \;=\; 1.$$

Simplificando o 1 e dividindo por y (que é diferente de zero), segue

$$y\left(\frac{1}{t^2} + 1\right) \;=\; \frac{2}{t};$$

logo $y = g(t)$ e $x = g(t)/t - 1 = f(t)$.

É claro que se $t \in \mathbb{Q}$, então $f(t)$ e $g(t)$ são racionais. E se $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são racionais, então $t = y/(x + 1)$ também é racional. □

Vou lhes contar agora que t é este, de onde vieram esta f e esta g. Chamando de W o ponto $(-1, 0)$ e de P um ponto (x, y) na circunferência, o parâmetro t é a tangente do ângulo θ que o segmento WP faz com o eixo das abscissas (θ é considerado negativo se P estiver no semiplano inferior). Vem daí a relação $t = y/(x + 1)$. Substituindo

$$x = (y/t) - 1 \tag{3}$$

na equação da circunferência, obtemos uma equação de segundo grau em y com soluções $y = 0$ e $y = 2t/(t^2 + 1)$. Para obter x em função de t, basta agora substituir a expressão obtida para y na equação (3). Olhando a Figura 1, fica claro que θ deve percorrer todos os valores do intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$ (o que corresponde a t assumir todos os valores reais) para que P percorra todos os pontos da circunferência diferentes de W.

A maneira mais conhecida de se parametrizar um círculo é tomando-se como parâmetro o ângulo φ formado pelo segmento OP e pelo eixo das abscissas, onde O denota a origem do sistema de eixos. Obtém-se assim $x = \cos\varphi$ e $y = \operatorname{sen}\varphi$. Como $\theta = \varphi/2$, seguem então as identidades trigonométricas

$$\cos\varphi = \frac{1 - \tan^2(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{2\tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)}.$$

Para provar que todo arco contém infinitos pontos racionais, basta tomarmos um arco arbitrário que não contenha (nem sequer como ponto extremo) o ponto W. Sejam P_1 e P_2 os extremos de um tal arco, e sejam θ_1 e θ_2, respectivamente, os ângulos formados por WP_1 e WP_2 com o eixo das abscissas. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\theta_1 < \theta_2$. O arco consiste então dos pontos P tais que WP formam ângulos $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ com o eixo das abscissas. O intervalo $(\tan\theta_1, \tan\theta_2)$ contém infinitos números racionais. A cada um desses números racionais corresponde, pela bijeção do Teorema 1, um ponto distinto com ambas as coordenadas racionais no arco dado.

3. Uma família de curvas cobrindo $(0, 1) \times (0, 1)$

A afirmação "se n é um inteiro maior que 2, então a curva $x^n + y^n = 1$ não tem pontos racionais com ambas as coordenadas não-nulas" não é apenas uma consequência do Teorema de Fermat-Wiles: se o teorema fosse falso, ela também seria falsa (isto é mais fácil de verificar do que o que fizemos na Seção 1 e é o que justifica o título daquela seção). Esta reformulação do enunciado do teorema suscita a seguinte questão: o que acontece se, no lugar de n em (2), tomarmos um expoente real positivo a? Agora temos de nos restringir ao primeiro quadrante, já que potência com expoente real só se define quando a base é positiva. Será que as curvas resultantes têm pontos com ambas as coordenadas racionais?

Podemos usar um computador (veja o resultado na Figura 2) para esboçar as curvas $x^a + y^a = 1$, para diversos valores de a. A figura sugere que elas se aproximam dos eixos coordenados quando a tende a zero, e dos outros dois lados de $[0,1] \times [0,1]$ quando a cresce muito. Assim, esta família de curvas cobre todo o interior do quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Para demonstrarmos rigorosamente esta afirmação, observemos primeiro que as curvas são na verdade gráficos de funções de uma variável:

$$x^a + y^a = 1 \iff y = (1 - x^a)^{1/a}.$$

Para cada x fixo, podemos olhar para a expressão $(1 - x^a)^{1/a}$ como função de a e estudar como ela se comporta. Isto nos leva então ao seguinte teorema.

Teorema 2. *Para cada (x, y) em $(0,1) \times (0,1)$, existe um único real positivo a tal que $x^a + y^a = 1$.*

Demonstração: Dado $x \in (0,1)$, consideremos a função $h_x(a) = (1 - x^a)^{\frac{1}{a}}$, $a > 0$. Como $0 < x < 1$, se $0 < a < b$, temos $0 < x^b < x^a < 1$ e, portanto, $0 < 1 - x^a < 1 - x^b < 1$. Como $0 < 1/b < 1/a$, vem então:

$$0 < (1 - x^a)^{\frac{1}{a}} < (1 - x^b)^{\frac{1}{a}} < (1 - x^b)^{\frac{1}{b}} < 1;$$

ou seja, h_x é estritamente crescente. Além disso, quando a se aproxima de zero, a base da potência que define h_x tende a zero, e o expoente fica arbitrariamente grande. Logo $h_x(a)$ tende a zero quando a tende a zero. Quando a tende a infinito, a base tende a 1 e o expoente tende a zero. Logo, $h_x(a)$ tende a 1 quando a tende a infinito. Isto prova que h_x é uma bijeção do intervalo $(0, +\infty)$ no intervalo $(0,1)$. Como de costume, denotemos por $h_x^{-1} : (0,1) \to (0, +\infty)$ a inversa de h_x.

Dado um ponto $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$, ele satisfaz $x^a + y^a = 1$ se, e somente se, $y = h_x(a)$. O único a que satisfaz esta última igualdade é $a = h_x^{-1}(y)$. $\square$

Segue do Teorema 2, em particular, que cada ponto com coordenadas racionais em $(0,1) \times (0,1)$ pertence a precisamente uma das curvas da família $x^a + y^a = 1$. Concluímos assim que esta família de curvas possui muitos pontos racionais. Mas o que dizer de cada curva individualmente? Ouvi dos meus amigos algebristas (mas não estou qualificado para falar sobre o assunto) que certos métodos desenvolvidos no século passado, e que foram usados para demonstrar o teorema de Fermat, podem ser usados também para estudar a existência de pontos racionais numa curva $x^a + y^a = 1$ com a racional. Um visão panorâmica desses métodos (que os algebristas chamam de "geométricos", embora seja difícil ver geometria neles) é dada em [1]. Nesse texto, a parametrização racional da circunferência que vimos aqui é mencionada duas vezes.

Que eu saiba, não há técnicas disponíveis para abordar o problema no caso em que a é irracional. Um artifício que agora me parece muito simples (devo confessar que precisei da ajuda da minha turma do almoço para ver isto) permite dar um exemplo de um número irracional α e de um ponto com ambas as coordenadas racionais $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ tal que $x^\alpha + y^\alpha = 1$. Mas não vou contar qual é, para não tirar do leitor a alegria de descobrir sozinho.

Agradecimentos

Tive a colaboração de muitos amigos para escrever este artigo, em conversas na sala do café do IME, no almoço no clube dos professores da USP, ou trocando emails. Sou grato a todos eles mas, como a lista é grande, vou citar somente um nome: Daniel Tausk. Espero que ninguém fique magoado por ter tido seu nome omitido. É que Daniel é realmente uma singularidade quando se trata de resolver problemas ou discutir conceitos matemáticos. Não é só por causa deste artigo que eu queria citar o nome dele.

Referências

[1] Jordan S. Ellenberg, *Arithmetic Geometry*, Seção IV.5 de "The Princeton Companion to Mathematics" (edited by Timothy Gowers), Princeton University Press, 2008.

[2] Elon Lages Lima, Geometria Analítica e Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[3] Serge Lang, Cálculo - Volume 1, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.