

CONTANDO ÁREAS (O TEOREMA DE PICK)

ANTÔNIO LUIZ PEREIRA E SEVERINO TOSCANO MELO

INTRODUÇÃO

Consideremos um polígono P no plano cartesiano. Se os vértices de P têm todos coordenadas inteiras, então a *Fórmula de Pick* para sua área é

$$(1) \quad A = i + \frac{f}{2} - 1,$$

na qual i e f representam o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e nas arestas do polígono, respectivamente.

Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859 e morreu no campo de concentração de Theresienstadt em 1942. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da Matemática. Esta fórmula, que ficou conhecida como *o Teorema de Pick*, apareceu em um artigo publicado em Praga em 1899.

Esta *não é*, em geral, uma maneira prática para o cálculo da área de polígonos, já que a hipótese é, usualmente, falsa ou desconhecida. Não obstante, ela é bastante interessante, por várias razões. Em primeiro lugar há um apelo intrínseco pelo seu aspecto curioso de transformar o problema, em geral difícil, do cálculo de áreas, em uma “mera” contagem de pontos. Acreditamos que isto pode despertar o interesse de alguns estudantes pelo assunto. A fórmula pode também ser explorada de várias formas e níveis de profundidade pelo professor. Presta-se, por exemplo, a atividades de caráter basicamente lúdico. Ao mesmo tempo, um exame mais atento revela sutilezas e conexões entre vários assuntos de interesse para o ensino de Matemática. Em particular, qualquer tentativa de demonstração evidencia a necessidade de formular de maneira clara e precisa os conceitos envolvidos, o que deve ser, em nossa opinião, um dos objetivos do ensino da Matemática. A demonstração que apresentaremos é ainda uma boa aplicação do princípio de indução em um contexto um pouco diferente do usual.

Antes de iniciar uma apresentação mais rigorosa, vamos alinhar as ideias centrais da demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que a fórmula (1) tem um caráter aditivo, isto é: se o polígono P for a união de dois outros P_1 e P_2 que se intersectam em uma aresta comum, então a fórmula para P segue se ela vale para P_1 e P_2 . A ideia central, então, é dividir o polígono dado em dois outros com um número menor de lados. Prosseguindo neste procedimento, podemos decompor o polígono em triângulos para os quais o teorema pode ser demonstrado diretamente (esta é a estratégia escolhida, por exemplo, em [2]). De fato, esta decomposição não será perseguida até o final aqui. Em vez disso, usaremos o princípio de indução. Mostraremos que o resultado vale para triângulos (o que dá o passo inicial para o processo de indução) e então usaremos a aditividade mencionada acima para completar o argumento de indução.

Como já mencionamos, para transformar essas ideias em um argumento rigoroso é necessário, inicialmente, formular de maneira adequada o que se quer demonstrar. Para evidenciar esta necessidade, observemos que a fórmula (1) *não vale* se a definição de polígono for demasiado geral, como ilustra a Figura 1.

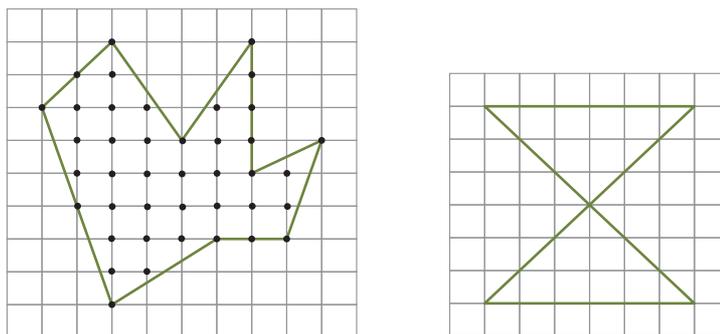


FIGURA 1. A fórmula de Pick vale para polígonos sem auto-interseção

Tendo isto em mente, damos uma definição de linha poligonal e polígono, adequada para os nossos propósitos, na Seção 1. Provamos que, se um desses polígonos que definimos (que são conexos e não têm autointersecção) tiver mais de três vértices, dois desses vértices podem ser unidos por um segmento que não o intersecta. Apesar da demonstração da fórmula para triângulos ser bastante conhecida, e mesmo previsível para quem não a conheça, ela é apresentada na Subseção 2.2 para tornar o texto mais completo. Na última subseção, explicitamos os argumentos que nos levam, a partir dos resultados das duas seções anteriores, à conclusão da demonstração de (1).

1. LINHAS POLIGONAIS E POLÍGONOS NO PLANO

Dados dois pontos A e B no plano, denotamos por \overline{AB} o segmento de reta que tem A e B como extremos. Chamamos de interior de \overline{AB} o conjunto dos pontos de \overline{AB} que são distintos de A e de B . Dado um número finito de pontos distintos do plano, V_1, V_2, \dots, V_n , chamamos de *linha poligonal com extremos em V_1 e V_n* a união dos segmentos (chamados de arestas) $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_{n-1}V_n}$. Supomos que três vértices consecutivos nunca são colineares. Chamamos de *linha poligonal fechada*, ou simplesmente *polígono*, com vértices V_1, V_2, \dots, V_n , a união dos segmentos $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_{n-1}V_n}, \overline{V_nV_1}$. Também supomos que três vértices consecutivos de um polígono não são colineares, entendendo agora que $\{V_{n-1}, V_n, V_1\}$ e $\{V_n, V_1, V_2\}$ também são conjuntos de vértices consecutivos.

Diremos que o polígono é *simples* se a intersecção de um par de arestas não consecutivas é sempre vazia (um par de arestas consecutivas é determinado por cada conjunto de três vértices consecutivos). Um polígono simples P divide o plano em duas regiões: o interior I e o exterior E de P . Essas regiões são caracterizadas pelas seguintes propriedades. Dois pontos do plano fora de P são extremos de alguma linha poligonal que não intersecta P se e somente se ou os dois pertencem a I ou os dois pertencem a E . Além disso, I é limitada e E é ilimitada e P é fronteira comum de ambas (P ser “fronteira” de I e de E significa: qualquer pequeno disco centrado em qualquer ponto de P contém pontos de I e de E). Este é um caso particular do célebre Teorema de Jordan, para o qual uma prova elementar pode ser encontrada em [1, Seção V.3.1].

Lema 1. *Seja P um polígono com interior I . Então qualquer ponto A de P pode ser ligado a qualquer ponto B de I por uma linha poligonal cujos pontos, exceto A , estão todos contidos em I .*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor que o ponto A pertence ao interior de uma aresta L de P e deixar para o leitor a tarefa de adaptar o argumento para o caso em que A é um vértice. Se um disco D de centro em A tiver raio suficientemente pequeno, então a intersecção dele com P será um diâmetro de D , contido no interior de L . O complementar desse diâmetro em D consiste de dois semidiscos D_1 e D_2 . Como A pertence à fronteira de I , existe $A_1 \in I \cap (D_1 \cup D_2)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $A_1 \in D_1$. Se A_2 é outro ponto de D_1 , então o segmento $\overline{A_1A_2}$ está todo contido em D_1 e não intersecta P (pois está contido em D e a intersecção de D com P é disjunta de D_1). Logo, $A_2 \in I$. Isto prova que $D_1 \subset I$. Podemos ligar A a A_1 por uma linha poligonal toda contida em I , por definição de I . A união desta linha poligonal ao segmento $\overline{A_1A}$ é a linha poligonal que procurávamos. \square

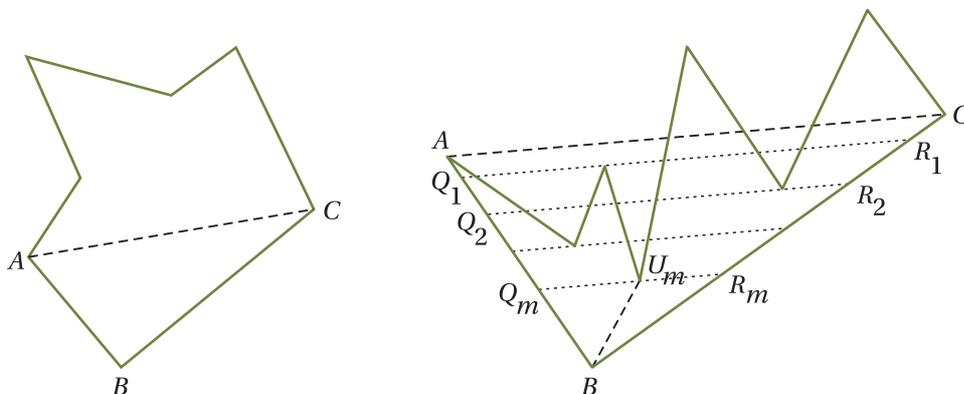


FIGURA 2. Se \overline{AC} intersectar P , então B pode ser conectado a algum outro vértice.

Lema 2. *Num polígono simples P com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\{A, B, C\}$ vértices consecutivos (nessa ordem) de P . O segmento \overline{AC} não é uma aresta porque P tem mais de três vértices. Se o interior de \overline{AC} não intersecta P , o problema está resolvido. Suponhamos

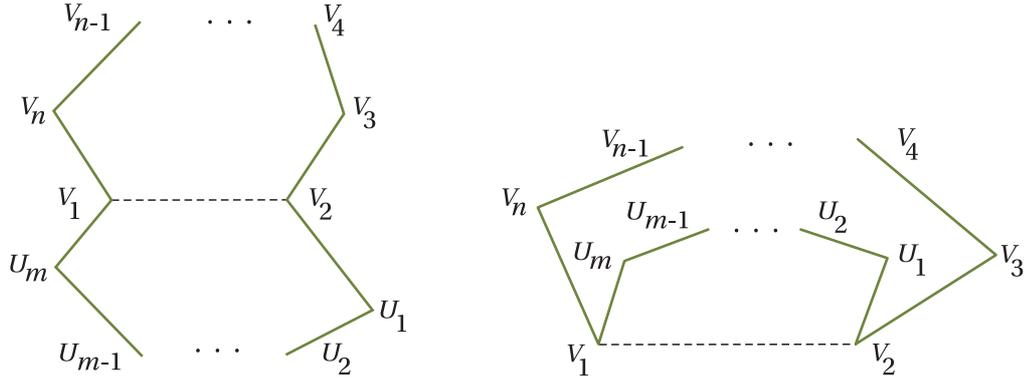


FIGURA 3. Q' pode estar contido no exterior ou no interior de P

então que alguma aresta de P intersecta o interior de \overline{AC} (ver Figura 2). Ela deve então ou intersectar um dos outros dois lados do triângulo ΔABC , ou ter um extremo contido no interior do triângulo unido com o segmento \overline{AC} . A primeira possibilidade está excluída pois os outros dois lados são arestas de P , que não tem auto-interseção. Segue que existem vértices $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ da poligonal P no interior do triângulo ΔABC unido com o segmento \overline{AC} . As retas paralelas ao segmento \overline{AC} passando por U_i , $i = 1, 2, \dots, k$, intersectam os lados AB e BC em pontos R_i e Q_i , respectivamente, formando triângulos: $T_1 = \Delta BR_1Q_1, T_2 = \Delta BR_2Q_2, \dots, T_k = \Delta BR_kQ_k$. Seja T_m o menor deles, na ordem dada pela inclusão (isto é, $T_m = \cap_{i=1}^k T_i$; se houver mais de um com esta propriedade, escolha arbitrariamente um deles). O segmento $\overline{U_mB}$ não é uma aresta, une dois vértices de P e, por um argumento similar ao anterior, seu interior não intersecta P . De fato, o interior de $\overline{U_mB}$ está contido no interior do triângulo ΔBR_mQ_m que, por construção, não contém nenhum vértice de P . Se alguma aresta de P intersectasse $\overline{U_mB}$ ela teria que intersectar um dos segmentos R_mB ou Q_mB o que não pode ocorrer pois eles estão contidos em arestas de P . \square

Com algum esforço adicional, poderíamos ter provado uma versão mais forte deste lema: existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior está contido no interior de P . Isto será feito em um apêndice ao final do artigo.

2. POLÍGONOS COM VÉRTICES EM \mathbb{Z}^2

Como é usual em Geometria Analítica, introduzindo coordenadas cartesianas ortogonais, podemos identificar os pontos do plano com \mathbb{R}^2 . Os pontos com coordenadas inteiras estão, dessa forma, identificados com \mathbb{Z}^2 .

2.1. Propriedade aditiva da fórmula. Sejam P e Q polígonos simples no plano cuja interseção é igual a uma aresta comum. Fazendo permutações dos vértices de P e de Q , podemos sem perda de generalidade supor que os vértices de P são V_1, V_2, \dots, V_n e os de Q são $V_1, V_2, U_1, U_2, U_3, \dots, U_m$. Denotemos por $P\sharp Q$ o polígono de vértices $V_2, V_3, \dots, V_n, V_1, U_m, U_{m-1}, \dots, U_3, U_2, U_1$.

Suponhamos que todos os vértices de P , assim como os de Q , pertencem a \mathbb{Z}^2 . Nesta subsecção, nosso objetivo é provar que, se a fórmula (1) vale para P e Q , então ela vale também para $P\sharp Q$. Denotemos por i_1, i_2 e i o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos no interior de P , de Q e de $P\sharp Q$, respectivamente. E por f_1, f_2 e f o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos nas poligonais fechadas P, Q e $P\sharp Q$, respectivamente.

Denotemos por Q' o complementar da aresta $\overline{V_1V_2}$ em Q . Como Q' é uma união crescente de linhas poligonais com extremos pertencentes ao complementar de P , então ou Q' está inteiramente contido no interior de P ou está inteiramente contido no exterior de P (ver Figura 3).

Consideremos primeiramente o caso em que Q' está contido no exterior de P . Neste caso, os interiores I_P e I_Q de P e de Q não se intersectam e o interior de $P\sharp Q$ é igual à união $I_P \cup I_a \cup I_Q$, onde I_a denota o interior da aresta $\overline{V_1V_2}$. Estas afirmações, intuitivamente óbvias, podem ser demonstradas detalhadamente usando as propriedades do interior e do exterior de um polígono. Limitamo-nos entretanto a mencionar que, pelo Lema 1, um ponto qualquer $A \in I_P$ pode ser ligado a um ponto $C \in I_a$ por uma linha poligonal contida em I_P (exceto pelo ponto C), e um ponto qualquer $B \in I_Q$ pode ser ligado a C por uma linha poligonal contida em I_Q (exceto pelo ponto C). A união das duas poligonais é, portanto, uma linha poligonal que não intersecta $P\sharp Q$ ligando A e B .

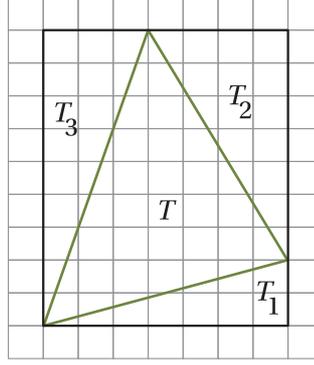


FIGURA 4. Teorema de Pick para triângulos.

Temos então que a área do polígono $P\sharp Q$ é igual à área do polígono P somada à área do polígono Q . Queremos mostrar portanto que

$$(2) \quad i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 + \frac{f_1}{2} - 1) + (i_2 + \frac{f_2}{2} - 1)$$

Como o interior de $P\sharp Q$ é igual à união disjunta de I_P , I_a e I_Q , temos que $i = i_1 + i_2 + f_3$, onde f_3 denota o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos em I_a . A linha poligonal $P\sharp Q$ é igual à união de P com Q subtraída de I_a . Como $P \cap Q = \overline{V_1 V_2}$, o número de pontos de \mathbb{Z}^2 contidos em $P \cap Q$ é igual a $f_3 + 2$ (lembrando que, por hipótese, V_1 e V_2 pertencem a \mathbb{Z}^2). Assim, $f = f_1 + f_2 - (f_3 + 2) - f_3 = f_1 + f_2 - 2(f_3 + 1)$. Daí vem:

$$i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + f_3) + \frac{f_1 + f_2 - 2(f_3 + 1)}{2} - 1,$$

o que demonstra (2).

Consideremos agora o caso em que Q' está contido no interior de P . Queremos então provar que

$$(3) \quad i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 + \frac{f_1}{2} - 1) - (i_2 + \frac{f_2}{2} - 1)$$

O interior de P é igual à união disjunta do interior de $P\sharp Q$ com o interior de Q com o complementar de $\overline{V_1 V_2}$ em Q . Com o mesmo f_3 que usamos no primeiro caso, obtemos $i_1 = i + i_2 + f_2 - (f_3 + 2)$, logo

$$i = i_1 - i_2 - f_2 + (f_3 + 2).$$

Tal como no caso anterior, vale também agora que $f = f_1 + f_2 - 2(f_3 + 1)$. Daí vem:

$$i + \frac{f}{2} - 1 = (i_1 - i_2 - f_2 + f_3 + 2) + \frac{f_1 + f_2 - 2(f_3 + 1)}{2} - 1,$$

o que demonstra (3).

2.2. O caso de triângulos. Seja T um triângulo retângulo com vértices em \mathbb{Z}^2 e catetos paralelos aos eixos coordenados e seja R o retângulo que tem os catetos de T como dois de seus lados. Sejam m e n os comprimentos dos catetos de T , i o número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de T e f_h o número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior da hipotenusa de T . O número de pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de R é $(m-1)(n-1)$. Daí vem que

$$i = \frac{(m-1)(n-1) - f_h}{2}.$$

O número f de pontos de \mathbb{Z}^2 em T é igual a $m + n + f_h + 1$. Assim

$$i + \frac{f}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1) - f_h}{2} + \frac{m + n + f_h + 1}{2} - 1 = \frac{mn}{2},$$

e segue que a fórmula (1) vale para triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos coordenados.

Todo retângulo R pode ser escrito como $R = T_1\sharp T_2$, onde T_1 e T_2 são triângulos retângulos. Segue então do que provamos na subseção anterior que a fórmula (1) vale para todo retângulo com vértices em \mathbb{Z}^2 e lados paralelos aos eixos coordenados.

Convidamos agora o leitor a reler a subseção anterior para se convencer de que o mesmo argumento que lá usamos mostra também que, se a fórmula (1) vale para $P_1\sharp P_2$ e para P_1 , então vale também para P_2 .

Seja agora T um triângulo qualquer com vértices em \mathbb{Z}^2 . Podemos encontrar triângulos retângulos T_1 , T_2 e T_3 com vértices em \mathbb{Z}^2 e catetos paralelos aos eixos coordenados tais que $R = T \# T_1 \# T_2 \# T_3$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados (em alguns casos especiais, menos de três triângulos serão necessários, mas o argumento será igual – ver Figura 4). Como a fórmula (1) vale para R , T_1 , T_2 e T_3 , ela vale também para T .

2.3. O caso geral. A demonstração de (1) será por indução sobre o número de vértices de P . Na subseção anterior, vimos que a fórmula é válida se P tiver três vértices. Suponhamos que a fórmula já foi provada se o número de vértices for menor que n . Provemos então que ela é válida para a linha poligonal P de vértices V_1, V_2, \dots, V_n . Pelo Lema 2, P possui um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta P . Sem perda de generalidade, podemos supor que um desses vértices é V_1 . Seja V_p o outro vértice. Seja P_1 o polígono de vértices V_1, V_2, \dots, V_p e seja P_2 o polígono de vértices $V_1, V_p, V_{p+1}, \dots, V_n$. A fórmula (1) vale para P_1 e para P_2 , pois ambas têm menos de n vértices. Pelo resultado da Subseção 2.1, ela vale também para $P = P_1 \# P_2$.

APÊNDICE

Lema 3. *Num polígono simples P com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior está contido no interior de P .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja B o vértice de P com ordenada y_0 mínima (se existir mais de um, escolhemos um deles) e sejam B e C tais que $\{A, B, C\}$ sejam vértices consecutivos (nessa ordem) de P . O segmento \overline{AC} não é uma aresta porque P tem mais de três vértices. Nessas condições, os pontos do interior do triângulo $\triangle ABC$, suficientemente próximos de B , estão no interior de P . Pode-se demonstrar este fato, intuitivamente óbvio, observando-se que os pontos fora do triângulo e próximos de B podem ser conectados, sem intersectar P , a qualquer ponto de ordenada $y < y_0$ (é preciso usar, além disso, que qualquer disco que contenha B contém pontos do interior e pontos do exterior de P).

Suponhamos primeiro que o triângulo $\triangle ABC$ não contenha outros vértices de P , além de A, B e C . Afirmamos então que \overline{AC} é o segmento procurado. Já observamos acima que ele não é uma aresta. Provemos portanto que ele está contido no interior de P . Se D é um ponto no interior de \overline{AC} , então \overline{DB} está contido no triângulo $\triangle ABC$. Se alguma aresta de P intersecta \overline{DB} , ela deve então ou intersectar um dos lados \overline{AB} ou \overline{BC} do triângulo $\triangle ABC$, ou ter um extremo contido no interior do triângulo unido com o segmento \overline{AC} . A primeira possibilidade está excluída pois os outros dois lados são arestas de P , que não tem auto-interseção e a segunda está excluída por hipótese. Assim, o segmento \overline{DB} passa por pontos arbitrariamente próximos de B , no interior do triângulo $\triangle ABC$, os quais sabemos estarem no interior de P e concluímos que D tem de estar no interior de P .

Suponhamos agora que existam outros vértices $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ de P , além de A, B e C no triângulo $\triangle ABC$. Procedendo exatamente como na demonstração do Lema 2, obtemos então um vértice U_m pertencente ao interior de $\triangle ABC$ tal que o segmento $\overline{U_m B}$ não é uma aresta e não intersecta P . Como os pontos de $\overline{U_m B}$ próximos a B pertencem ao interior de P , segue que o segmento inteiro está contido no interior. \square

Uma primeira aplicação deste lema é uma simplificação dos argumentos que levam à demonstração do Teorema de Pick dada na Seção 2. De fato, como podemos supor que o segmento $\overline{V_1 V_p}$ obtido na Subseção 2.3 está contido no interior de P , necessitamos usar a fórmula demonstrada na Subseção 2.1 apenas no caso em que Q' está contido no exterior de P . Ou seja, o último parágrafo da Subseção 2.1 pode ser omitido e substituído pelo Lema 3. Devemos observar também que, na Subseção 2.2, aplicamos a aditividade apenas no caso em que a interseção dos dois polígonos P e Q está contida no interior de $P \# Q$.

Mais significativamente, o Lema 3 tem como consequência o fato de que qualquer polígono (mesmo um não-convexo) pode ser escrito como uma união finita de triângulos ou, em outras palavras, todo polígono pode ser *triangularizado*. O Lema 3 fornece precisamente a ferramenta necessária para se provar por indução esta afirmação, pois permite reduzir o caso de um polígono com n lados ao caso de um polígono com um número de lados menor que n .

Despedimo-nos do leitor com uma pergunta: será que o Lema 2 vale para linhas poligonais com auto-interseção?

REFERÊNCIAS

- [1] R. Courant, H. Robbins (2000). *O que é Matemática? – Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*, Editora Ciência Moderna.
- [2] Elon L. Lima (1991). *Como calcular a área de um polígono se você sabe contar*, em: Meu Professor de Matemática e outras histórias pp. 101-114, IMPA e Fundação Vitae.