

Severino Toscano Melo
e Francisco Moura Neto

Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais

18^o Colóquio Brasileiro de Matemática ^{impa}

SEVERINO TOSCANO MELO	FRANCISCO MOURA NETO
Instituto de Matemática	Departamento de Matemática
Univ. Federal de Pernambuco	PUC-Rio
Av. Prof. Luiz Freire s/n	Rua Marquês de São Vicente, 225
CCEN	Gávea
Cidade Universitária	22453 - Rio de Janeiro - RJ
50739 - Recife - PE	

COPYRIGHT by Severino Toscano Melo e Francisco Moura Neto

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

ISBN
85-244-0064-1

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina, 110
22.460 — Rio de Janeiro - RJ

À memória de
João Carlos A. Barata
(1959-1990)

fdmn

Sumário

1	Euler e Navier-Stokes	1
1.1	Dedução das Equações	1
1.2	Exemplos e Comentários	12
1.3	Identidades Vetoriais, Lei de Bernoulli	17
2	A Vorticidade em Cena	21
2.1	Dinâmica da Vorticidade	21
2.2	Biot-Savart	24
3	Mais Exemplos	27
3.1	Separação de Variáveis	27
3.2	Distribuição Radial de Vorticidade	32
3.3	Vórtice de Burgers	37
4	Uma Equação de Onda	43
4.1	O Modelo Clássico	43
4.2	Crise	44
4.3	Ruptura	47
4.4	Reconciliação	49
5	Distribuições	53
5.1	Convergência em Espaços de Funções	53
5.2	Funções Teste e Distribuições	59
5.3	Derivação	64
5.4	Cálculo Vetorial	67
5.5	A Equação de Burgers	82
5.6	Comentários	85
6	Forma Fraca de Euler e Navier-Stokes	87

7	Convergência em \mathcal{D}'	93
7.1	O Processo de Translação	95
7.2	O Processo de Oscilação	96
7.3	O Processo de Concentração	99
7.4	Questões de Continuidade	106
8	Novos Fenômenos	109
8.1	Considerações Preliminares	109
8.2	Persistência de Oscilações	110
8.3	Desenvolvimento de Concentrações	115
9	Soluções de DiPerna-Majda	123
9.1	Perturbações Singulares	123
9.2	Noções de Medida e Integração	125
9.3	Soluções Generalizadas	136
9.4	Última Seção	140
A	EDPs lineares de 1ª ordem	143
B	A Equação do Calor	149

Lista de Figuras

1.1	Fundo de um rio	13
1.2	Jato (Deformação)	14
3.1	Escoamento por um ralo.	33
4.1	Onda de translação	45
4.2	Glaciar não diferenciável	46
4.3	48
4.4	51
5.1	Tubo de raio ϵ	55
5.2	Distribuições de Dirac	62
5.3	Distribuição de Dirac no círculo unitário	63
5.4	Folha unidimensional de vorticidade	71
5.5	Cones suaves e ângulo sólido	73
5.6	Deformação contínua de curvas e superfícies.	74
5.7	Dois vórtices em rotações contrárias	75
5.8	77
5.9	Campo de velocidades do anel de vorticidade	80
5.10	Filamento circular de vorticidade	81
7.1	Processo de translação	96
7.2	Processo de oscilação	97
7.3	Função escada	100
7.4	Processo de concentração	101
8.1	Campo de velocidades	116
9.1	Somas de Riemann e de Lebesgue	125
9.2	Fibrado de esferas	138
A.1	Curva inicial e curvas características	144

Definições e Notação

- A *transposta* da matriz A , denotada por A^t , é a matriz cujas entradas são: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.
- Vetores em \mathbb{R}^m são identificados com matrizes coluna $m \times 1$. Vetores são denotados por letras minúsculas, latinas ou gregas, em negrito, como por exemplo: $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$ ou $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$. O i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^m é denotado por \mathbf{e}_i .
- O rotacional, o divergente, o gradiente e o laplaciano são denotados, respectivamente por: rot , div , ∇ e Δ .
- O conjunto dos números reais é denotado por \mathbb{R} , o dos naturais por \mathbb{N} , ao passo que \mathbb{R}^+ denota $(0, +\infty)$ e \mathbb{Z}_+ denota $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
- O *supremo* de um subconjunto de \mathbb{R} , denotado por $\sup X$, define-se como sendo o menor real que seja maior ou igual a todos os elementos de X . Analogamente, o *ínfimo* de um subconjunto de \mathbb{R} , denotado por $\inf X$, define-se como sendo o maior real que seja menor ou igual a todos os elementos de X .
- Diz-se que um subconjunto de \mathbb{R}^m é *compacto* se ele for fechado e limitado.
- O *suporte* de uma função f é o fecho do conjunto dos pontos onde ela é não nula.
- $\mathcal{C}^n(\Omega)$ denota o conjunto das funções definidas em Ω possuindo n derivadas contínuas. Se $n = 0$, trata-se do conjunto das funções contínuas. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções definidas em Ω infinitamente diferenciáveis.
- $\mathcal{BC}(\Omega)$ denota o conjunto das funções limitadas e contínuas em Ω .

- \mathcal{C}_0^n denota o conjunto das funções em \mathcal{C}^n e de suporte compacto. Analogamente, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções definidas em Ω infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.
- O produto interno entre vetores de \mathbb{R}^m é denotado por um ponto: “ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ”. Enquanto que o produto interno entre funções é denotado por (f, g) ; e $\langle l, f \rangle$ denota o valor do funcional linear l calculado na função f .
- Sendo $(a, b) \ni s \mapsto \mathbf{c}(s) \in \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de uma curva, o *elemento de comprimento* da curva é $dl = |d\mathbf{c}/ds| ds$. E sendo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \ni (s_1, s_2) \mapsto \mathbf{a}(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^3$, uma parametrização local de uma superfície, o *elemento de área* da superfície é $dS = |\mathbf{a}_{s_1} \times \mathbf{a}_{s_2}| ds_1 ds_2$.

Prefácio

A dinâmica de um fluido incompressível é descrita pela lei da conservação da massa e pela lei da conservação do momento (segunda lei de Newton). Na *descrição euleriana*, expressa-se a conservação da massa pela condição de o divergente do campo de velocidades ser nulo. A conservação do momento expressa-se por uma equação diferencial parcial não-linear, conhecida como equação de Navier-Stokes. Para o caso de fluidos sem viscosidade, o termo de segunda ordem da equação de Navier-Stokes desaparece e a equação é chamada de equação de Euler.

Limites fracos de soluções das equações de Euler para fluidos incompressíveis exibem comportamentos difíceis de serem explicados ou compreendidos intuitivamente, considerando-se apenas o conceito clássico de solução ou o conceito de Leray-Hopf de solução fraca. Sequências de soluções podem convergir para funções (ou distribuições) que não sejam soluções; pode acontecer, também, de uma sequência de campos de velocidades convergir para uma solução, mas com “perda de energia cinética” no limite. Além disso, sequências de soluções das equações de Navier-Stokes, com a viscosidade indo a zero, podem ter como limite uma não-solução da equação de Euler, ao contrário do que seria razoável esperar. O conceito de solução generalizada introduzido por DiPerna-Majda [15] concilia estas questões, além de abrir novas perspectivas para a compreensão das soluções não-regulares das equações dos fluidos incompressíveis.

O principal objetivo deste texto é apresentar exemplos que ilustram alguns dos fenômenos mencionados acima. Nos dois primeiros capítulos, deduzimos as equações de Euler e de Navier-Stokes e estabelecemos a equivalência destas com as equações da dinâmica da vorticidade. No Capítulo 3, obtemos diversos exemplos de soluções clássicas, alguns dos quais utilizados na construção dos exemplos de “persistência de oscilações” e “desenvolvimento de concentrações”, no Capítulo 8. Nos Capítulos 4 a 7, fazemos uma rápida introdução à teoria das distribuições, que, embora incompleta, transmite as principais idéias e conceitos da teoria, permitindo ao(à) leitor(a), por

exemplo, compreender e aplicar os conceitos de soluções fracas de equações diferenciais e de convergência fraca de distribuições. No capítulo final, damos a definição de solução generalizada de DiPerna-Majda, motivado pelos exemplos apresentados.

Os pré-requisitos para os Capítulos 1 a 3 são apenas um bom conhecimento de Cálculo Vetorial e um pouco de Álgebra Linear e de Equações Diferenciais Ordinárias, material usualmente coberto nos dois primeiros anos de graduação em Matemática, Física ou Engenharia. Para os Capítulos 4 a 8, é desejável, mas não imprescindível, alguma familiaridade com Análise básica. No Capítulo 9, damos uma rápida introdução à teoria da Medida e Integração, mencionando também alguns de seus resultados mais avançados, necessários à compreensão detalhada da definição de solução generalizada de DiPerna-Majda.

Pretendemos que o texto seja uma janela para a vasta e efervescente área da Mecânica dos Fluidos, tendo em mente como leitor(a) típico(a) um(a) estudante interessado(a) em Matemática Aplicada, em final de graduação ou início de mestrado, não só em Matemática, mas também em Engenharia ou Física. Muitas técnicas de Análise são introduzidas, com o objetivo de aplicá-las ao estudo de uma equação específica, e sem perder de vista seu significado físico. Por uma questão de tempo, e também para não prejudicar o propósito de contextualizar o material abstrato numa situação concreta, somos forçados a omitir certos detalhes ou evitamos enunciar precisamente alguns teoremas. Procuramos, entretanto, apontar quais os problemas matemáticos que estamos evitando e dar referências. Os exercícios preenchem algumas dessas lacunas, alguns deles sendo inseridos no meio do texto por esta razão.

A lista de referências é longa e heterogênea, incluindo de textos de Cálculo a artigos de pesquisa. Citamos trabalhos recentes sobre duas faces da Mecânica dos Fluidos: Métodos Numéricos e Análise Assintótica. Um aspecto em que não tocamos é o problema de existência e unicidade propriamente dito (veja [33, 60, 32]).

Expressamos nossos agradecimentos à Comissão Organizadora do 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de dar o curso e pela compreensão com os sucessivos adiamentos da entrega das notas. Um dos autores (F.D.M.N) gostaria de agradecer ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco pela sempre gentil hospitalidade e excelentes condições de trabalho propiciadas durante duas visitas nas quais parte destas notas foram elaboradas, e à turma de um curso de Tópicos de Matemática Aplicada, lecionado no Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro durante o 1^o Semestre de

1991, no qual estas notas foram testadas pela primeira vez, pela paciência em conviver com as notas em processo de aglutinação. Finalmente, gostaria de agradecer o carinho com que sua família aceitou, durante meses seguidos, a sua “ausência” e os intermináveis “— Agora eu não posso”. O outro autor (S.T.R.M.) agradece a seus alunos de Iniciação Científica, Ulisses Braga Neto e Henrique Nunes, pela colaboração.

Rio-Recife, maio de 1991.

Capítulo 1

Euler e Navier-Stokes

1.1 Dedução das Equações

Consideremos uma porção de fluido (líquido ou gás) que, no instante $t = 0$, ocupa uma região do espaço $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Uma maneira de descrever seu movimento é dar uma *função fluxo* $\phi(\mathbf{a}, t)$ tal que, para cada $\mathbf{a} \in \Omega_0$, a curva $t \mapsto \phi(\mathbf{a}, t)$ descreva a trajetória da partícula que ocupa a posição \mathbf{a} no instante $t = 0$. Esta é a chamada *descrição lagrangiana* e os pontos de Ω_0 são chamados *coordenadas materiais*.

Em vez de acompanharmos o movimento de cada partícula, podemos dar a velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ da partícula que, no instante t , ocupa a posição \mathbf{x} . Esta é a chamada *descrição euleriana* e os pontos \mathbf{x} são chamados *coordenadas espaciais*.

A relação

$$\mathbf{v}(\phi(\mathbf{a}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{a}, t) , \quad \mathbf{a} \in \Omega_0 , \quad (1.1)$$

segue-se imediatamente das definições. Assim, conhecendo-se ϕ e sabendo-se inverter a função ϕ_t , definida por

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t) ,$$

obtém-se $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ pela fórmula

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t)] .$$

Reciprocamente, se o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ for conhecido, obtém-se $\phi(\mathbf{a}, t)$ resolvendo-se, para cada $\mathbf{a} \in \Omega_0$, a equação diferencial ordinária com

condição inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{c} &= \mathbf{v}(\mathbf{c}, t) \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{a} \end{cases} \quad (1.2)$$

(*equação da trajetória*), e definindo $\phi(\mathbf{a}, t)$ como sendo igual ao valor da solução de (1.2) no instante de tempo t .

Nosso objetivo nesta seção é deduzir, a partir da segunda lei de Newton e do princípio da conservação da massa, equações diferenciais envolvendo o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Vamos admitir que a função fluxo ϕ existe e possui todas as propriedades de diferenciabilidade e invertibilidade que forem necessárias. Mais precisamente, se Ω_t é a região do espaço ocupada pelo fluido no instante t , admitimos que

$$\begin{aligned} \phi_t : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\ \mathbf{x} &\longmapsto \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

é diferenciável e possui inversa diferenciável. Se, por exemplo, \mathbf{v} for de classe C^1 , tal hipótese será satisfeita para t suficientemente pequeno (Veja, por exemplo, [55]). Às vezes, será necessário que ϕ_t possua mais de uma derivada, mas isso não será dito explicitamente.

Derivada Material e Teorema do Transporte

Dada uma função $f(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega_t$, e uma trajetória¹ $\mathbf{c}(t)$, calculemos a derivada em relação ao tempo da função composta

$$f_c(t) = f(\mathbf{c}(t), t) \quad ,$$

usando a regra da cadeia. Chamamos o resultado $f'_c(t)$ de *derivada de f ao longo de \mathbf{c}* . Obtemos:

$$\begin{aligned} f'_c(t) &= \nabla f(\mathbf{c}(t), t) \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{c}(t), t) \\ &= \left(\mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (\mathbf{c}(t), t) \quad . \end{aligned}$$

(Denotamos o produto interno por \cdot e o gradiente por ∇ .) Definamos a *derivada material* de f pela fórmula:

$$\frac{Df}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \quad (1.3)$$

¹Isto é, c satisfaz (1.2) para algum a .

Vimos então que, dada uma função $f(\mathbf{x}, t)$, a derivada material de f , $\frac{Df}{Dt}$, nos dá o valor, no instante t , da derivada de f ao longo da trajetória da partícula que, no instante t , ocupa a posição $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Nas aplicações, pode desempenhar o papel de f , por exemplo, a densidade de massa, a temperatura, ou mesmo a própria velocidade. O operador $\frac{D}{Dt}$ pode ser aplicado a uma função cujos valores são matrizes ou vetores, fazendo-o atuar em cada componente. Por exemplo:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{Dv_1}{Dt}, \frac{Dv_2}{Dt}, \frac{Dv_3}{Dt} \right)^t .$$

Utilizaremos nas próximas subseções o seguinte resultado técnico.

Teorema 1 (Teorema do Transporte) *Satisfeitas as hipóteses sobre a função fluxo ϕ mencionadas acima e sendo Ω_t uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência, vale a seguinte fórmula:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} . \quad (1.4)$$

Observação: Se Ω_0 for um aberto com fronteira regular o suficiente para permitir a aplicação do Teorema da Divergência ², Ω_t também será um aberto satisfazendo a mesma propriedade de regularidade na fronteira, desde que ϕ_t satisfaça hipóteses adequadas de regularidade e invertibilidade.

Demonstração (do Teorema 1): Fazendo na integral do lado esquerdo de (1.4) a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{y})$, obtemos:

$$\int_{\Omega_0} f(\phi_t(\mathbf{y}), t) J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} , \quad (1.5)$$

onde J denota o determinante jacobiano

$$J(\mathbf{y}, t) = \det \left(\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \right) .$$

Como, por hipótese, ϕ_t é sempre inversível, $J(\mathbf{x}, t)$ nunca se anula. E, como o jacobiano é contínuo e $J(\mathbf{y}, 0)$ é igual a 1 para todo $\mathbf{y} \in \Omega_0$, então o determinante acima é sempre positivo, tendo sido por isso desnecessário tomar o valor absoluto de J em (1.5). A integral que resultou da mudança

²Também chamado Teorema de Gauss. Veja [24] para o enunciado preciso do Teorema.

de variáveis tem domínio de integração independente do tempo, podemos portanto trocar a ordem de derivação e integração. Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [f(\phi(\mathbf{y}, t), t)] J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\Omega_0} f(\phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Tratemos logo da primeira integral que aparece do lado direito da igualdade acima. A derivada no integrando é a derivada de f calculada ao longo de uma trajetória. Aparece então a derivada material que acabamos de definir. Obtemos assim que esta primeira integral é igual a:

$$\int_{\Omega_0} \frac{Df}{Dt}(\phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} ,$$

a qual, através da mudança de variáveis $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{y})$, vemos ser igual a

$$\int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} .$$

Vamos agora cuidar da última integral em (1.6). Devemos calcular a derivada do jacobiano,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} ,$$

no ponto (\mathbf{y}, t) . Comutando derivadas, usando (1.1) e a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial y_j} [v_i(\phi(\mathbf{y}, t), t)] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(\mathbf{y}, t) .$$

Aplicando as propriedades usuais dos determinantes e omitindo, por enquanto, os pontos onde as derivadas são calculadas, vem:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \end{vmatrix} .$$

O primeiro destes três somatórios de determinantes é igual ao produto $(\partial v_1 / \partial x_1)J$, pois os termos correspondentes a $k = 2$ e $k = 3$ são iguais a $(\partial v_1 / \partial x_k)$ vezes um determinante com linhas repetidas. Afirmção análoga vale para os outros dois somatórios. Obtemos, então:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} \mathbf{v} ,$$

onde o jacobiano e sua derivada são calculados no ponto (\mathbf{y}, t) e o divergente $\operatorname{div} \mathbf{v}$ é calculado no ponto $(\phi(\mathbf{y}, t), t)$. Daí, vem:

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_0} f(\phi(\mathbf{y}, t), t) [(\operatorname{div} \mathbf{v})(\phi(\mathbf{y}, t), t)] J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} ,$$

que é igual, via a substituição $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{y})$, a

$$\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} ,$$

o que demonstra (1.4). ■

Conservação da Massa, Fluidos Incompressíveis

Denotaremos por $\rho(\mathbf{x}, t)$, ou simplesmente ρ , a densidade de massa do fluido. Por definição, ρ é uma função tal que a massa da porção de fluido que ocupa uma região Ω no instante t é dada por

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} .$$

A hipótese de que a massa se conserva se traduz na equação

$$\int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} ,$$

válida para todo $t \geq 0$, onde Ω_t é a imagem de Ω_0 por ϕ_t , e Ω_0 é arbitrário. Assumindo como hipótese que ρ tem derivadas contínuas, e aplicando então o Teorema do Transporte, temos:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} .$$

Se Ω é um aberto qualquer ocupado pelo fluido no instante t , então existe um aberto Ω_0 tal que $\phi_t(\Omega_0) = \Omega$, já que estamos supondo que ϕ_t é inversível e contínua. Vemos então que a função contínua

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$$

é tal que sua integral, num instante de tempo arbitrário, sobre qualquer aberto do espaço material é nula. Isto só é possível se esta função for identicamente nula. Obtemos assim a *equação da conservação da massa*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (1.7)$$

também conhecida como *equação da continuidade*, pois ela expressa o fato de que o fluido é um meio contínuo. ³ Usando a definição de derivada material (1.3) e a identidade

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \quad ,$$

a equação em (1.7) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad .$$

A condição de o volume de qualquer porção de fluido ser preservado pelo fluxo é descrita pela equação

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = 0 \quad . \quad (1.8)$$

Se esta condição for satisfeita, o Teorema do Transporte aplicado à função constante $f \equiv 1$ implica que a equação

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0$$

é válida para todo aberto Ω_0 . Daí se conclui que o divergente da velocidade é nulo em todos os pontos:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (1.9)$$

A recíproca é claramente também verdadeira, ou seja, as equações em (1.9) e (1.8) são equivalentes.

³Para um tratamento de meios contínuos em geral, veja [50].

Se um fluido tem densidade constante, independente do tempo e do espaço, a equação em (1.7) implica que o fluido satisfaz (1.9) e, portanto, também a condição de incompressibilidade (1.8). Chamaremos o fluido de incompressível se ρ for constante. Seria mais natural definir como incompressível o fluido que satisfizesse (1.8) ou (1.9). Não o fazemos por mera conveniência: quase sempre, nestas notas, trataremos somente do caso de densidade constante. Note que temos apenas uma “quase-recíproca”: se vale (1.9), então (1.7) implica que ρ é constante ao longo das trajetórias das partículas. Daí, se $\rho(\mathbf{x}, 0)$ for independente de \mathbf{x} , $\rho(\mathbf{x}, t)$ será independente de \mathbf{x} e de t .

Conservação do Momento

O momento (linear) de uma porção de fluido que ocupe, no instante t , a região Ω_t é dado pela integral ⁴

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \quad .$$

Pela segunda lei de Newton, a derivada em relação ao tempo desta quantidade é igual à força total atuando em Ω_t . Esta é igual à soma das *forças externas* que atuam no fluido (peso, força de Coriolis ou mesmo forças eletromagnéticas) e das *forças internas*, exercidas sobre Ω_t pelo restante do fluido. Suporemos conhecido o somatório das forças externas por unidade de massa, que será denotado por $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. ⁵ Isto é, a força externa total atuando na porção de fluido que, no instante t , ocupa a região Ω_t é dada por

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \quad .$$

No caso de apenas o peso ser considerável, \mathbf{f} é constante e igual à aceleração da gravidade.

Quanto às forças internas, supomos serem elas *forças de contato* ou *tensões*. Desprezamos então ações a distância entre as partículas do fluido e supomos existir um *campo de tensões* $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ que dê a força de contato por unidade de área atuando numa superfície perpendicular a \mathbf{n} no ponto \mathbf{x} , no instante t . Mais precisamente, a força exercida pelo resto do fluido na

⁴Uma vez que ρ dá a massa por unidade de volume, ρv dá o momento por unidade de volume, assim como $\rho|v|^2/2$ dá a densidade de energia cinética.

⁵A rigor, deveríamos escrever $f(x, v, t)$, para incluir casos como o de forças magnéticas, por exemplo. Isto em nada alteraria a dedução que se segue.

porção de fluido que, no instante t , ocupa a região fechada Ω_t , delimitada pela superfície $\partial\Omega_t$, é dada por

$$\int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x \quad ,$$

onde \mathbf{n} denota o vetor unitário normal a $\partial\Omega_t$, apontando para fora. O campo de tensões não é independente das outras grandezas físicas do problema. Na verdade, vamos obter uma equação diferencial envolvendo $\boldsymbol{\tau}$, ρ , \mathbf{v} e \mathbf{f} . Um teorema de Cauchy (veja [28], parágrafo 7) garante que, se o fluido satisfizer a segunda lei de Newton, então $\boldsymbol{\tau}$ tem de depender linearmente de \mathbf{n} , ou seja, existe uma função matricial $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathcal{S}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad .$$

(Em particular, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, o que é consequência da terceira lei de Newton.)

A segunda lei de Newton então fica expressa pela seguinte integral, de onde omitimos os argumentos (\mathbf{x}, t) das funções que aparecem nos integrandos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathcal{S} \mathbf{n} dS_x \quad .$$

Podemos calcular a derivada do lado esquerdo desta equação aplicando o Teorema do Transporte a cada componente. Quanto à integral de superfície, ela pode ser transformada numa integral de volume usando o Teorema da Divergência. Obtemos, então:

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho \mathbf{f} - \operatorname{Div} \mathcal{S} \right] d\mathbf{x} = 0 \quad , \quad (1.10)$$

onde $\operatorname{Div} \mathcal{S}$ denota o vetor que tem a i -ésima componente igual ao divergente do i -ésimo vetor-linha de \mathcal{S} . Usando (1.7), é fácil verificar a igualdade

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad ,$$

de onde, usando a equação em (1.10) e o fato de seu integrando ser contínuo e Ω_t arbitrário, resulta a *Equação da Conservação do Momento*:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{Div} \mathcal{S} \quad . \quad (1.11)$$

Fluidos não-viscosos, Equações de Euler

As equações de conservação da massa (1.7) e do momento (1.11) são insuficientes para descrever o fluido: ⁶ para completar a descrição precisamos relacionar \mathcal{S} com as outras variáveis. Se supusermos que as forças internas atuam apenas perpendicularmente à superfície Ω_t (ausência de atrito ou *viscosidade*), $\mathcal{S}\mathbf{n}$ deve ser sempre paralelo a \mathbf{n} ou, equivalentemente, existe uma função $p(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)I \quad ,$$

onde I denota a matriz identidade. A função p é chamada *pressão* e

$$\text{Div } \mathcal{S} = -\nabla p \quad .$$

Esta hipótese ainda é insuficiente: (1.7) e (1.11) consistem agora de quatro equações escalares para cinco incógnitas v_1, v_2, v_3, ρ e p . Uma saída é supor que o fluido é incompressível, o que é uma boa aproximação para o caso dos líquidos. Usando (1.7) e (1.3), obtemos então as *Equações de Euler* para um fluido não-viscoso e incompressível, denotando também por ρ o valor constante da densidade de massa:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \rho \mathbf{f} & (1.12) \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Salientamos mais uma vez que o operador $\mathbf{v} \cdot \nabla$ é aplicado em (1.12) a cada componente de \mathbf{v} , isto é:

$$[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}]_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad .$$

A equação em (1.12) pode ser lida como a segunda lei de Newton, o lado esquerdo correspondendo ao termo massa vezes aceleração e o direito à força, ambos por unidade de volume. O aparecimento do termo não-linear deve-se à própria descrição euleriana: $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}$ não representa a variação da velocidade de uma dada partícula, mas a variação da velocidade *no ponto* \mathbf{x} , que é ocupado por partículas possivelmente diferentes a cada instante. A variação

⁶As equações em (1.7) e (1.11) são válidas para qualquer “meio contínuo Newtoniano”. As hipóteses que fazemos nesta seção e na próxima é que caracterizam os chamados “fluidos newtonianos”.

da velocidade de uma dada partícula é igual a $\frac{D}{Dt}\mathbf{v}$, como vimos quando tratamos da derivada material.

Uma outra maneira de completar as equações em (1.12) e (1.7) é introduzir uma *equação de estado*, ou seja, supor que existe uma função

$$r : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $p = r(\rho)$. Para um gás ideal a temperatura constante, p é diretamente proporcional a ρ . Em modelos físicos mais realistas, torna-se necessário introduzir novas variáveis tais como temperatura, entropia, energia interna (veja [28], parágrafos 19 e 20).

Equações de Navier-Stokes

Ao tentarmos obter formas para a matriz \mathcal{S} que incluam forças de viscosidade, argumentos físicos e matemáticos ⁷ (veja [32], [25] e [28, parágrafo 16]), permitem-nos concluir que, em primeira aproximação, \mathcal{S} deve ser dada por

$$\mathcal{S} = -pI + \mu'(\operatorname{div} \mathbf{v})I + \mu(G + G^t) , \quad (1.13)$$

onde, μ e μ' são constantes, G^t denota a transposta de G , que denota a matriz $\nabla \mathbf{v}$:

$$G = \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} . \quad (1.14)$$

Para completar o sistema formado pelas equações em (1.7), (1.11) e (1.13), temos duas saídas, tal como no caso não-viscoso. Ou procuramos uma equação de estado $p = r(\rho)$, ou supomos que o fluido é incompressível. Vimos que, neste caso, o divergente de \mathbf{v} é nulo. Isto implica em duas simplificações: O termo $\mu' \operatorname{div} \mathbf{v}$ desaparece e vale (verifique) a igualdade

$$\operatorname{Div}(G + G^t) = \Delta \mathbf{v} .$$

⁷Aqui vai um esboço desses argumentos. É fisicamente razoável supor que $S + pI$ dependa apenas das derivadas espaciais de v , pois não há atrito em um fluxo com velocidade uniforme. Como em rotações rígidas também não há movimento relativo entre as partículas, $S + pI$ não deve depender da parte anti-simétrica do gradiente de v , mas apenas de $(G + G^t)/2$ (veja a seção seguinte, especialmente a discussão após (1.22)). Usando-se que esta dependência deve ser invariante por transformações ortogonais (rotações dos eixos coordenados) e desprezando-se termos de segunda ordem, chega-se a (1.13).

A equação de conservação do momento (1.11) se escreve então como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad , \quad (1.15)$$

conhecida como a *equação de Navier-Stokes*. A constante μ é chamada o *coeficiente de viscosidade*⁸ e seu inverso o *número de Reynolds*. Um fluido viscoso e incompressível é descrito então pelas equações em (1.15) e (1.9)

Estudando exemplos de soluções, consideraremos quase sempre $\mathbf{f} \equiv 0$. Isto é equivalente a tomar \mathbf{f} constante, no seguinte sentido. Um par (\mathbf{v}, p) é solução de (1.15) e (1.9) com $\mathbf{f} \equiv 0$ se e somente se (\mathbf{v}, p^\sharp) é solução de (1.15) e (1.9) com $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_0$, onde

$$p^\sharp(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{x} \quad .$$

(Verifique esta afirmação.) Em particular, $\mathbf{v} \equiv 0$ e $p(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade, é uma solução das equações de Navier-Stokes, para \mathbf{f} constante e igual a \mathbf{g} . Corresponde a um líquido em repouso, na presença da gravidade. (Veja o Exercício 15)

Para futura referência, escrevemos aqui as equações de Euler e de Navier-Stokes, para a conservação do momento, na ausência de forças externas.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p \quad (\text{Euler}) \quad (1.16)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{Navier-Stokes}) \quad (1.17)$$

Exercício 2 a) Encontre a pressão $p(\mathbf{x}, t)$ que, juntamente com o campo de velocidades nulo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, resolve (1.12) e (1.15), para $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}$. Aqui, supomos que a aceleração da gravidade \mathbf{g} é paralela ao eixo x_3 , ω é uma constante e $\mathbf{r} = (x_1, x_2, 0)$ é o vetor radial das coordenadas cilíndricas. Mostre que as superfícies de nível da pressão são parabolóides de revolução.

b) Interprete fisicamente o resultado acima, e conclua que a superfície de separação entre o ar e um líquido girando num tubo cilíndrico com velocidade angular constante, sem movimento relativo entre as partículas do fluido nem entre o fluido e o recipiente, é um parabolóide de revolução. (Dicas: A pressão na superfície de separação é constante, igual à pressão atmosférica. O campo \mathbf{f} dado no item (a) é a soma da aceleração da gravidade com a “aceleração centrífuga”.)

⁸Sobre o significado físico da constante de viscosidade, consulte [20].

1.2 Exemplos e Comentários

A maioria dos problemas de Mecânica dos Fluidos envolve a delimitação da região ocupada pelo fluido (que pode até variar com o tempo, e então a determinação da fronteira faz parte do problema) e a prescrição de condições de fronteira.⁹ Os exemplos de que tratamos nesta seção e no Capítulo 3, exceto o Exemplo 3 que vem logo em seguida, são de soluções das equações de Euler ou de Navier-Stokes definidas no espaço inteiro. Tais exemplos servem para ilustrar comportamentos locais permitidos aos fluidos: pode-se argumentar que o ponto observado está tão longe da fronteira que a presença desta não é sentida pela porção do fluido nas imediações do ponto.

Tratamos, nesta seção, de três exemplos básicos de soluções *estacionárias* (isto é, independentes do tempo). Utilizamo-las, ao final da seção, para dar uma descrição local do movimento de um fluido em geral. Estes exemplos são casos particulares de classes de exemplos de soluções discutidas no Capítulo 3.

Exemplo 3 Um campo de vetores da forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v(x_2), 0, 0)^t \quad (1.18)$$

satisfaz imediatamente as equações

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad ,$$

tratando-se, portanto, de uma solução das equações em (1.16) e (1.9) com pressão constante.

Assuma que a força da gravidade \mathbf{g} atua no fluido e que $\mathbf{g} = g^\sharp \mathbf{e}_1 + g^\# \mathbf{e}_2$. (Se $|\mathbf{g}| = g$, e θ é o ângulo determinado pela horizontal e pelo eixo x_1 , então $g^\sharp = g \sin \theta$ e $g^\# = -g \cos \theta$.) Na presença de viscosidade e da força da gravidade, a pressão deve satisfazer $\partial p / \partial x_2 = -\rho g^\sharp$, $\partial p / \partial x_3 = 0$, e v e p ficam relacionados pela equação

$$\mu v''(x_2) - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g^\sharp = 0.$$

Em particular, uma pressão linear, $p(\mathbf{x}) = -\rho g^\sharp x_2$, juntamente com o campo em (1.18) com

$$v(x_2) = -\frac{\rho g^\sharp}{2\mu} x_2^2 + \frac{\rho g^\sharp}{\mu} x_2 \quad ,$$

⁹No caso de uma fronteira fixa, exige-se que a componente da velocidade normal à fronteira seja nula, ou seja, que o fluido não atravesse a fronteira. Para fluidos viscosos, exige-se mesmo que o fluido adira à fronteira, ou seja, que a velocidade se anule na fronteira.

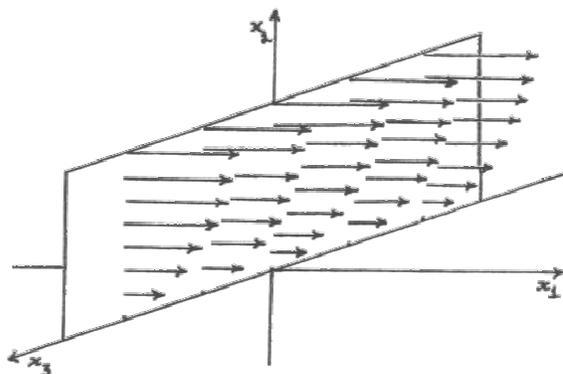


Figura 1.1: Fundo de um rio

é uma solução de (1.15) e (1.9) no semi-espaco $\{x_2 \geq 0\}$ com condição de fronteira $\mathbf{v}(x_1, 0, x_3) = 0$ e velocidade máxima de escoamento em $x_2 = 1$, (digamos que a altura máxima do rio seja igual a 1, e que aí ocorra a velocidade máxima de escoamento). Este é um modelo simplificado para a cinemática do escoamento não-turbulento de água em um rio largo, longe das margens, o fundo do rio coincidindo com o plano x_1x_3 . As trajetórias das partículas são retas paralelas ao eixo x_1 . A força que impulsiona a água, é a componente da força da gravidade na direção tangente ao fundo do rio.

Exemplo 4 (Deformação) Seja D uma matriz simétrica de traço nulo e $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$. É um cálculo simples verificar que o divergente de \mathbf{v} é nulo e que vale a igualdade

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = D^2\mathbf{x} .$$

Pode-se ver então que $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$, com

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{\rho}{2}\mathbf{x}^t D^2\mathbf{x} ,$$

é solução de (1.16) e (1.9). Como $\Delta\mathbf{v} \equiv 0$, também (1.17) é satisfeita.

Vamos descrever as trajetórias das partículas supondo que a matriz é diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

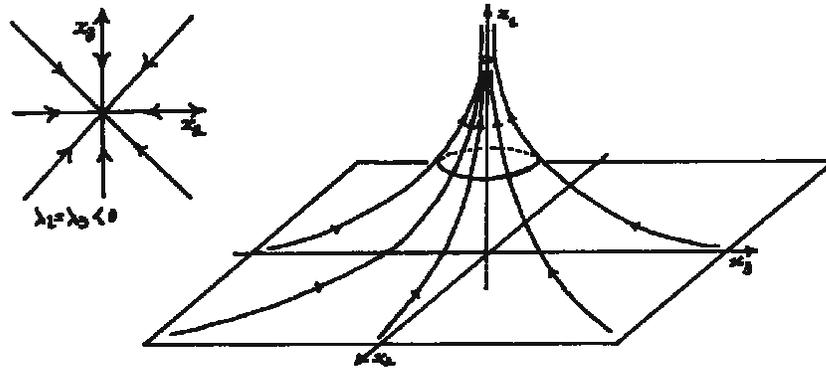


Figura 1.2: Jato (Deformação)

O caso geral pode ser transformado neste, através da mudança de variáveis $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, onde U é uma matriz ortogonal tal que $U^{-1}DU$ é diagonal. Tal U existe, pelo Teorema Espectral (veja [8], Teorema 9.3.1). As equações das trajetórias ficam então desacopladas:

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Para uma dada condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, a solução é

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 e^{\lambda_1 t}, a_2 e^{\lambda_2 t}, a_3 e^{\lambda_3 t})^t \quad .$$

Como o traço de D é nulo, temos: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Para fixar idéias, suponhamos que λ_1 é positivo e λ_2 e λ_3 são negativos. Vemos então que as partículas se aproximam rapidamente do eixo x_1 e se afastam rapidamente do plano $x_2 x_3$. Esta é uma aproximação grosseira de um jato.

Exemplo 5 (Rotação) Dado $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, consideremos o campo vetorial

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad ,$$

onde \times denota o produto vetorial. É fácil verificar que \mathbf{v} tem divergente nulo e que vale a igualdade:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{x} \quad .$$

Por inspeção vemos então que se tomarmos para pressão

$$p(\mathbf{x}) = \rho \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{x}|^2 \right]$$

obtemos uma solução da equação de Euler (1.16), que é também solução da equação de Navier-Stokes (1.17), pois $\Delta \mathbf{v} = 0$.

Seja $\mathbf{x}(t)$ a trajetória de uma partícula neste fluido, isto é, $\mathbf{x}(t)$ satisfaz

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} .$$

Daí seguem-se as igualdades seguintes, válidas para todo t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}(t)) &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}(t)) = 0 \\ \frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)|^2 &= 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t) = 0 . \end{aligned}$$

Concluimos daí que as trajetórias são círculos em planos perpendiculares a $\boldsymbol{\omega}$. Denotando por \mathbf{x}_\perp a projeção de \mathbf{x} no plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ passando pela origem,

$$\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} ,$$

obtemos:

$$\frac{d\mathbf{x}_\perp}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\perp . \quad (1.19)$$

Como \mathbf{x}_\perp e $\boldsymbol{\omega}$ são perpendiculares, a equação 1.19 implica em

$$\left| \frac{d\mathbf{x}_\perp}{dt} \right| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{x}_\perp| .$$

Segue-se então que a velocidade angular de todas as partículas em torno de $\boldsymbol{\omega}$ é constante e igual a $|\boldsymbol{\omega}|$. (Verifique, usando coordenadas.) Ou seja, o fluido todo move-se como um corpo rígido girando em torno de $\boldsymbol{\omega}$ com velocidade angular constante.

Façamos agora algumas considerações sobre matrizes simétricas e anti-simétricas que usaremos em seguida para dar uma interpretação do fluxo de um fluido qualquer como sendo, local e aproximadamente, uma superposição de uma rotação, uma translação e uma dilatação. Dada uma matriz quadrada A , as matrizes

$$A_+ = \frac{1}{2}(A + A^t) \text{ e } A_- = \frac{1}{2}(A - A^t) , \quad (1.20)$$

são chamadas suas partes simétrica e anti-simétrica, respectivamente. É óbvio que valem as igualdades $A_+ = A_+^t$, $A_- = -A_-^t$ e $A = A_+ + A_-$. O leitor deve verificar que esta decomposição é única, isto é, se B e C forem matrizes simétrica e anti-simétrica, respectivamente, e $A = B + C$, então $B = A_+$ e $C = A_-$.

Exercício 6 a) Dada uma matriz 3×3 anti-simétrica A , mostre que existe um único $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. (Dica: $\xi_1 = a_{32}$, $\xi_2 = a_{13}$ e $\xi_3 = a_{21}$)

b) Se Ω é a parte anti-simétrica da matriz-gradiente de um campo de vetores $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ em \mathbb{R}^3 , então

$$\Omega\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

c) Mostre que, se Ω é uma matriz anti-simétrica e \mathcal{D} uma matriz simétrica de traço nulo, então temos:

$$(\mathcal{D}\Omega + \Omega\mathcal{D})\mathbf{x} = -(\mathcal{D}\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (1.21)$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor tal que $\Omega\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Consideremos agora o comportamento de um fluido qualquer, em regime estacionário, nas proximidades de um ponto fixo \mathbf{x}_0 . Podemos escrever (expansão de Taylor):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

onde $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ é da ordem de $|\mathbf{h}|^2$. Tomando \mathbf{h} muito pequeno, decompondo $\nabla\mathbf{v}$ em suas partes simétrica e anti-simétrica, \mathcal{D} e Ω , e usando o item b do exercício acima, obtemos:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{D}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (1.22)$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, e $\boldsymbol{\omega}$ e \mathcal{D} são calculados no ponto \mathbf{x}_0 .

Tomando \mathbf{x}_0 como origem e \mathbf{h} no lugar de \mathbf{x} para descrever as trajetórias das partículas, vemos que o campo \mathbf{v} pode ser aproximadamente decomposto em três parcelas: uma responsável pela translação do fluido (as trajetórias associadas a um campo uniforme de velocidades são retas), outra responsável pela deformação do fluido, e a terceira pela rotação. A presença de um *rotacional* não nulo indica, portanto, a presença de *rotação*.

Exercício 7 Denota-se por $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ a matriz $((v_i v_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$. Mostre que as equações em (1.16) e (1.9) são equivalentes a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \text{Div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1.23)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

(O divergente de uma matriz foi definido após (1.10).)

Exercício 8 Seja $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))$ solução de (1.16) e (1.9). Mostre que, dados reais positivos α e β , definindo

$$\mathbf{v}_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, t) = \alpha \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{x}}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta} t \right) ,$$

existe $p_{\alpha, \beta}$ tal que $(\mathbf{v}_{\alpha, \beta}, p_{\alpha, \beta})$ também é solução das mesmas equações.

Exercício 9 Mostre que um campo de velocidades independente da coordenada x_3

$$(v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t), v_3(x_1, x_2, t))^t$$

é solução da equação de Navier-Stokes (1.17) se e somente se (v_1, v_2) é solução da equação de Navier-Stokes bidimensional, isto é,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \rho \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\nabla p + \mu \Delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ,$$

e v_3 é solução da equação

$$\rho \frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) v_3 = \mu \Delta v_3 .$$

(Observe que esta última equação é linear, se v_1 e v_2 forem conhecidos. Neste caso, e se $\mu = 0$, a equação pode ser resolvida pelo método das características, descrito no Apêndice A.)

1.3 Identidades Vetoriais, Lei de Bernoulli

Extremamente útil para a dedução de identidades vetoriais é a introdução do *pseudo-tensor anti-simétrico* de Levi-Civita (veja [1]):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \\ 1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)\} \end{cases} .$$

Se \mathbf{x} e \mathbf{y} são vetores de \mathbb{R}^3 , é fácil verificar que a i -ésima componente do produto vetorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é dada pela soma

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j y_k .$$

Analogamente, se \mathbf{u} é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 , a i -ésima componente do rotacional de \mathbf{u} é dada pela soma

$$(\text{rot } \mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} .$$

Também muito útil e bem mais conhecido é o *delta de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Proposição 10 *Dados i, j, l, m , pertencentes a $\{1, 2, 3\}$, vale a igualdade:*

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} . \quad (1.24)$$

Demonstração Suponha que i é igual a j ou que l é igual a m . Verifica-se facilmente que, então, os dois membros de (1.24) são nulos.

Suponha agora $i \neq j$ e $l \neq m$. Isto implica então que uma, e só uma, das três afirmações abaixo é verdadeira:

(a) dado qualquer $k \in \{1, 2, 3\}$, k é igual a um dos quatro números dados no enunciado da proposição.

(b) $i = l$ e $j = m$.

(c) $i = m$ e $j = l$.

Caso valha (a), ambos os lados de (1.24) são nulos. Caso valha (b), ambos são iguais a 1. Caso valha (c), ambos os lados são iguais a -1 . ■

Como aplicação, demonstraremos:

Proposição 11 *Dado um campo vetorial $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, vale a seguinte identidade:*

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 .$$

Demonstração Escrevamos a i -ésima componente do produto vetorial $(\text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ e apliquemos as definições e propriedades acima:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} u_k = \\ & - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ikj} \epsilon_{jlm} \right) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} u_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} u_k = \\
& - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} u_k + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k = \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 u_k^2 + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} .
\end{aligned}$$

Obtivemos assim a i -ésima componente de

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 ,$$

como queríamos. ■

Outras aplicações do pseudo-tensor de Levi-Civita ficam para os exercícios ao final da seção. Vamos agora aplicar a proposição anterior para obter a *lei de Bernoulli*.

Proposição 12 (Bernoulli) *Sejam \mathbf{v} e p uma solução independente do tempo de (1.12) com ρ e \mathbf{f} constantes, e com a propriedade adicional de o campo de velocidades ser irrotacional, isto é, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Então, a função*

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} + \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}{2} \quad (1.25)$$

é constante.

Demonstração A equação (1.12) para funções independentes do tempo, com ρ constante, é equivalente a:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{f} . \quad (1.26)$$

Usando a Proposição 11 e a equação $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, vemos que o lado esquerdo de (1.26) é igual a $\nabla(|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2/2)$. O lado direito, por sua vez, é igual a

$$\nabla \left(-\frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} \right) .$$

Segue-se então que $\nabla Q(\mathbf{x}) = 0$, para todo \mathbf{x} . ■

¹⁰E' claro que supomos conexa a região onde a solução está definida

Exercício 13 Considere o caso em que vale (1.12), mas a densidade ρ não é necessariamente constante. Mostre então que a função Q definida em (1.25) é constante ao longo das trajetórias das partículas. (Dica: A equação em (1.7) implica que ρ é constante ao longo das trajetórias.)

Exercício 14 Use o tensor anti-simétrico de Levi-Civita para demonstrar as identidades em (2.10), (2.15) e (2.20).

Exercício 15 (a) Mostre que o Teorema da Divergência em \mathbb{R}^3 é equivalente a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f n_j dS_x \quad ,$$

$j = 1, 2, 3$, para qualquer função escalar f . Aqui, n_j denota a j -ésima componente do vetor normal.

(b) Demonstre (2.17) e algumas das outras identidades de [53].

(c) Mostre que, no caso da hidrostática (isto é, $\mathbf{v} \equiv 0$, \mathbf{f} constante e igual à aceleração da gravidade \mathbf{g} e $p(\mathbf{x}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$), vale a igualdade

$$-\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \mathbf{n} dS_x = -\rho \mathbf{g} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \quad ,$$

para qualquer região Ω onde valha o Teorema da Divergência. Interprete fisicamente. (Dica: Princípio de Arquimedes.)

Exercício 16 (a) Mostre que se $B = ((b_{ij}))$ é uma matriz real 3×3 , então o vetor $\boldsymbol{\xi}$ associado à parte anti-simétrica de B , como descrito no item (a) do Exercício 6, é dado por

$$\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} b_{jk} \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

(b) Use os itens (b) e (c) do Exercício 6 para demonstrar a equação em (2.9), sob a hipótese de que o divergente da velocidade é nulo.

Capítulo 2

A Vorticidade em Cena

Será obtida, neste capítulo, uma formulação da mecânica dos fluidos incompressíveis que utiliza a velocidade e a vorticidade (que é o rotacional da velocidade) como variáveis dependentes, em vez da velocidade e da pressão. Algumas soluções clássicas das equações de Navier-Stokes serão encontradas, no próximo capítulo, utilizando as “equações da dinâmica da vorticidade”. Métodos numéricos de solução baseados na vorticidade podem ser desenvolvidos, sendo dadas referências sobre o assunto ao final da Seção 2.1.

2.1 Dinâmica da Vorticidade

Nosso objetivo inicial é obter uma equação de evolução para a vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, isto é, uma equação que nos dê $\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}$ em termos das outras derivadas de $\boldsymbol{\omega}$ e de outras grandezas. O primeiro passo será obter uma equação de evolução para a matriz-gradiente da velocidade G . (Veja (1.14).) Derivando em relação a x_j a i -ésima componente da equação de Navier-Stokes (1.17),

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i \quad ,$$

usando que as derivadas comutam, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \\ &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) . \end{aligned}$$

Escrevendo a equação acima na forma matricial, vem:

$$\rho \frac{D}{Dt} G + \rho G^2 = -P + \mu \Delta G , \quad (2.1)$$

onde P denota a matriz hessiana da pressão $P = ((\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}))_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Denotando por Ω e \mathcal{D} as partes simétrica e anti-simétrica de G , respectivamente, tomando as partes simétrica e anti-simétrica de (2.1), e usando que P é simétrica, obtemos equações de evolução acopladas para Ω e para \mathcal{D} (Veja a definição em (1.20):

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathcal{D} + \rho(\mathcal{D}^2 + \Omega^2) = -P + \mu \Delta \mathcal{D} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \Omega + \rho(\Omega \mathcal{D} + \mathcal{D} \Omega) = \mu \Delta \Omega . \quad (2.3)$$

A equação em (1.9) é equivalente a

$$\text{traço } \mathcal{D} = 0 \quad (2.4)$$

Podemos agora reescrever (2.3) tomando, no lugar das matrizes anti-simétricas que lá aparecem, os vetores que a elas correspondem, como descrito no Exercício 6. Note que, graças a (2.4), podemos aplicar o item c do Exercício citado. Obtemos então a equação de evolução que procurávamos:

$$\rho \frac{D}{Dt} \omega = \rho \mathcal{D} \omega + \mu \Delta \omega . \quad (2.5)$$

Esta equação pode ser interpretada como uma condição de equilíbrio entre três efeitos físicos que competem entre si: (i) a convecção da vorticidade, $\rho \frac{D}{Dt} \omega$ (a vorticidade tende a ser carregada pelo fluido); (ii) a difusão da vorticidade, $\mu \Delta \omega$ (a vorticidade tende a se espalhar, tal como faz a temperatura) e (iii) a deformação da vorticidade, $\rho \mathcal{D} \omega$ (a vorticidade é atenuada ou intensificada, conforme ω esteja alinhado com os autovetores de \mathcal{D} de autovalor negativo ou positivo, respectivamente). Veja exemplo no final da seção 3.1, onde este último efeito é ilustrado.

E' claro que a equação (2.5) sozinha não é suficiente para descrever a evolução da vorticidade, pois \mathcal{D} depende da velocidade, que também não é conhecida, a princípio. Acoplando à equação (2.5) as equações

$$\text{rot } v = \omega \quad (2.6)$$

$$\text{div } v = 0 , \quad (2.7)$$

obtemos um sistema que necessariamente é satisfeito pelo campo de velocidades de um fluido do tipo modelado por (1.17) e (1.9). Vejamos agora que, reciprocamente, se \mathbf{v} for solução de (2.5), (2.6) e (2.7), e se a região ocupada pelo fluido for simplesmente conexa (em particular, se for o espaço inteiro), então existe uma função p , tal que (1.17) é satisfeita. Para tanto, basta mostrarmos que é válida a igualdade:

$$\operatorname{rot} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} \right] = 0 . \quad (2.8)$$

Pois daí, o Teorema de Stokes permite-nos definir a pressão no ponto \mathbf{x} com sendo igual a menos a integral de linha da expressão entre colchetes em (2.8) a partir de um ponto fixo até \mathbf{x} , por um caminho arbitrário. (Verifique isto.) Trocando livremente a ordem das derivadas, vemos que (2.8) é equivalente à equação

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho \operatorname{rot} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] - \mu \Delta \boldsymbol{\omega} = 0 ,$$

a qual, por sua vez, após substituirmos (2.5), é equivalente a:

$$\operatorname{rot} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\mathcal{D}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\operatorname{rot} \mathbf{v}) . \quad (2.9)$$

Esta última equação é uma identidade válida para qualquer campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ em \mathbb{R}^3 , satisfazendo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, se \mathcal{D} denota a matriz $\frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t]$ (veja o Exercício 16).

Na próxima seção, vamos resolver (2.6) e (2.7), obtendo uma fórmula integral que dá \mathbf{v} a partir de $\boldsymbol{\omega}$. A partir de \mathbf{v} , podemos obter a matriz de deformação \mathcal{D} e substituir em (2.5), obtendo uma equação integro-diferencial de evolução para $\boldsymbol{\omega}$, envolvendo só $\boldsymbol{\omega}$. Não é tudo tão simples quanto parece porque, ao derivar (2.19), aparece no integrando um termo cujo módulo é da ordem de $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$, cuja integral em relação a \mathbf{y} diverge em qualquer aberto contendo \mathbf{x} . (Verifique isto.) Esta *integral singular*, entretanto, pode ser tratada teoricamente [41, 58]. Além disso, esta formulação da dinâmica da vorticidade pode ser utilizada para obter eficientes métodos numéricos [42, 37, 38, 41, 5, 12].

E' imediato verificar que $\mathcal{D}\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. A equação em (2.5) depois desta substituição,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \rho(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu \Delta \boldsymbol{\omega} ,$$

é conhecida como a equação de Helmholtz [43].

2.2 Biot-Savart

É conhecida como a *lei de Biot-Savart*¹ a fórmula integral em (2.19), que é uma solução em \mathbb{R}^3 , dado $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, do sistema de equações em (2.6) e (2.7).

Como $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ é nulo (veja Exercício 14), da equação 2.6 segue-se a igualdade $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$. Para resolvermos o sistema (2.6)-(2.7), necessariamente temos de assumir, portanto, que $\boldsymbol{\omega}$ satisfaz esta condição. Além disso, explicitaremos oportunamente condições de decaimento no infinito para $\boldsymbol{\omega}$, que serão necessárias para que certas integrais façam sentido. Como é usual em equações diferenciais, nossa estratégia será supor que o sistema que buscamos resolver tem solução, e daí obter uma fórmula que mostraremos em seguida ser, de fato, solução.

Aplicando o rotacional aos dois membros da equação em (2.6), e usando a identidade vetorial²

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

e a equação em (2.7), vem:

$$\Delta \mathbf{v} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \quad (2.11)$$

A equação de Poisson,

$$\Delta u = f \quad (2.12)$$

tem uma solução dada por

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad (2.13)$$

(Veja, por exemplo, [30, seção 4.1].)³ Uma solução de (2.11) é dada então aplicando a fórmula em (2.13) a cada componente de (2.11), o que dá:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad (2.14)$$

¹Esta fórmula aparece também em Eletromagnetismo. O campo magnético e a densidade volumétrica de corrente elétrica satisfazem as equações 2.6 e 2.7, nos papéis da velocidade e da vorticidade, respectivamente.

²Note que, do lado esquerdo desta identidade, o operador laplaciano é aplicado a cada componente da velocidade, enquanto que, do lado direito, há uma mistura de coordenadas. Esta fórmula é um caso particular da equação (3), página 220, da referência [63], onde é dada a definição do laplaciano em uma variedade Riemanniana

³Quanto à unicidade da solução, existem resultados do tipo: se f satisfaz uma certa condição de decrescimento no infinito, existe uma única solução u de (2.12) satisfazendo uma (possivelmente outra) condição de decrescimento no infinito. Há também resultados envolvendo condições de fronteira. Não vamos enveredar por esta trilha, o que nos levaria a questões matemáticas bastante delicadas, principalmente se levássemos em conta que nosso principal interesse é resolver (2.6) e (2.7) acopladas também a (2.5).

Usando a identidade vetorial

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = f\operatorname{rot}\mathbf{u} + \nabla f \times \mathbf{u} \quad (2.15)$$

(veja o Exercício 14), vem:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = & - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_y \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \\ & \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot}_y \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

A seguinte identidade é consequência do Teorema da Divergência (veja o Exercício 15):

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{u} d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \times \mathbf{n} dS_y . \quad (2.17)$$

Utilizando-a para $\Omega = \{\mathbf{y}; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R\}$, concluímos que a segunda integral em (2.16) é igual a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\{\mathbf{y}; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = R\}} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) \times \mathbf{n}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y .$$

Este limite dá zero se assumirmos a hipótese

$$\max\{|\mathbf{y}|^{1+\alpha}|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})|; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3\} < \infty , \quad (2.18)$$

para algum $\alpha > 0$. (Verifique isto. Dica: Esta hipótese implica que também $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+\alpha}|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})|$ é limitado, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, uma vez que temos $\lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/|\mathbf{y}| = 1$.) Assumindo (2.18), obtemos então que a segunda integral de (2.16) é nula. Calculando o gradiente que aparece na primeira, chegamos à fórmula conhecida como lei de Biot-Savart:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} . \quad (2.19)$$

Supor (2.18) é suficiente também para garantir que a integral imprópria em (2.19) converge. Denotando $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ por r , o módulo do integrando é limitado por uma constante vezes $r^{-3-\alpha}$, que é integrável em $r > 1$. (Use coordenadas esféricas para verificar isto.) Na região $r \leq 1$, basta supormos que $\boldsymbol{\omega}$ seja limitado. (Verifique isto.) A integração por partes que efetuamos garante então que também (2.14) converge e que as integrais que aparecem em (2.19) e (2.14) são iguais.

Verificação da lei de Biot-Savart

Vamos mostrar agora que a velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, definida em (2.14) satisfaz (2.6) e (2.7). Vamos trocar a ordem de derivação e integração à vontade, sem nos preocuparmos em especificar que tipo de decaimento no infinito $\boldsymbol{\omega}$ e suas derivadas precisariam ter para que tais procedimentos pudessem ser justificados.⁴

Através da troca de variáveis $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, reescrevemos (2.14), obtendo:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi z} (\text{rot } \boldsymbol{\omega})(\mathbf{z} + \mathbf{x}) \, d\mathbf{z} \quad .$$

Usando $(\text{rot } \boldsymbol{\omega})(\mathbf{z} + \mathbf{x}) = \text{rot}_x[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x})]$ e a identidade

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{u}) = 0 \quad , \quad (2.20)$$

vem:

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi z} \text{div}_x \text{rot}_x[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x})] \, d\mathbf{z} = 0 \quad .$$

Calculando $\text{rot } \mathbf{v}$, vem:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \text{rot}_x \text{rot}_x[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x})] \, d\mathbf{z} \quad .$$

Usando a identidade vetorial em (2.10), vem:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|z|} \Delta_x [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x})] \, d\mathbf{z} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|z|} \nabla_x [\text{div}_x(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x}))] \, d\mathbf{z} \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

A condição $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ foi tomada como hipótese no começo da seção, daí a segunda integral em (2.21) ser nula. Quanto à primeira integral, já mencionamos ser ela uma solução do problema de Poisson (2.12), com $\Delta \boldsymbol{\omega}$ no lugar de f . (Basta fazermos de volta a mudança $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{x}$, para reconhecermos aqui a integral em (2.13).) Reciprocamente, pode-se mostrar, sob certas condições de decaimento de $\boldsymbol{\omega}$ no infinito, que esta integral dá de fato $\boldsymbol{\omega}$, o que concluiria nossa demonstração. (Note que este é um problema de unicidade de soluções: $\boldsymbol{\omega}$ é *uma* solução de $\Delta \mathbf{u} = \Delta \boldsymbol{\omega}$, assim como a primeira integral de (2.21). Veja os comentários que fizemos sobre a unicidade da solução do problema de Poisson, em nota de rodapé, à página 24.)

⁴O leitor interessado deve consultar [3], Teorema 33.8, ou [29], Exercício VII.6, onde são dadas condições precisas sob as quais a troca é legítima.

Capítulo 3

Mais Exemplos

Neste Capítulo, obtemos exemplos, ou famílias de exemplos, de soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes bem mais sofisticados que os da Seção 1.2. O que há em comum aos métodos usados nas três seções deste capítulo é supormos que existem soluções de certos tipos pré-estabelecidos e obtermos então equações mais simples que as equações originais. Diversos problemas de valor inicial podem ser resolvidos explicitamente pelos métodos aqui estudados.

3.1 Separação de Variáveis

Dado $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, sabemos como obter uma solução estacionária $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ das equações de Euler, com pressão quadrática (isto é, $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t P \mathbf{x}$ para alguma matriz P), e tal que a vorticidade $\text{rot } \mathbf{v}$ seja independente de \mathbf{x} e igual ao vetor dado $\boldsymbol{\omega}$ (veja o Exemplo 5). Como a velocidade assim encontrada depende linearmente de \mathbf{x} , obtemos a igualdade $\Delta \mathbf{v} = 0$, seguindo-se daí que \mathbf{v} e p são também soluções de (1.17). Nesta seção, generalizamos este resultado e damos uma família de exemplos de soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes, *dependentes* do tempo, obtidas a partir de uma prescrição da parte simétrica da matriz-gradiente da velocidade e do valor inicial da vorticidade. A pressão que obtemos também é quadrática em \mathbf{x} , mas com coeficientes dependentes do tempo; e a velocidade é da forma $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x}$, onde $A(t)$ é uma matriz 3×3 tendo funções diferenciáveis como elementos.

Proposição 17 *Dada uma matriz 3×3 diferenciável $A(t)$, existe $p(\mathbf{x}, t)$ tal que (\mathbf{v}, p) , com $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x}$, seja solução de (1.16) e (1.9) se e somente*

se a matriz P , definida por

$$P(t) = -\rho \left[\frac{dA}{dt}(t) + A(t)^2 \right] \quad , \quad (3.1)$$

for simétrica e $A(t)$ tiver traço nulo. Sendo este o caso, a pressão será dada por

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t P(t) \mathbf{x} \quad .$$

Demonstração Um cálculo direto nos leva à igualdade:

$$\operatorname{div} [A(t)\mathbf{x}] = \operatorname{traço} A(t) \quad .$$

A equação 1.9 para \mathbf{v} da forma proposta é então equivalente a

$$\operatorname{traço} A(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad .$$

Calculemos a j -ésima componente de $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 v_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{jk}(t)x_k) \\ &= \sum_{i=1}^3 a_{ji}(t)v_i(\mathbf{x}, t) \quad . \end{aligned}$$

Obtivemos, portanto:

$$[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A^2(t)\mathbf{x} \quad .$$

A equação da conservação do momento (1.16) é então equivalente a:

$$\rho \left[\frac{dA}{dt}(t) + A^2(t) \right] \mathbf{x} = -\nabla p(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (3.2)$$

Se a matriz do lado esquerdo da equação em (3.2), que é igual a $-P(t)$ (veja a definição em (3.1)), for simétrica, então a pressão

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t P(t) \mathbf{x} \quad ,$$

juntamente com a velocidade proposta no enunciado da proposição, definem solução de (1.16) e (1.9). Reciprocamente, se existir, para $A(t)$ dada de traço nulo, pressão $p(\mathbf{x}, t)$ satisfazendo (1.16) juntamente com a velocidade dada

por $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x}$, decorre de (3.2) que o elemento na linha i e coluna j de $P(t)$ é

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}, t) \quad ,$$

e, portanto, $P(t)$ é simétrica. ■

Somando à pressão encontrada funções arbitrárias do tempo, ainda obtemos soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes. A menos desta “não-unicidade”, comum a qualquer solução, a pressão fica determinada pela escolha da matriz $A(t)$ satisfazendo as condições exigidas.

E’ claro que, se $A(t)$ for uma matriz simétrica, $P(t)$ também o será. Não é claro, entretanto, como podemos obter exemplos mais gerais de matrizes $A(t)$ satisfazendo as hipóteses da Proposição 17. A proposição abaixo nos dá a receita de como obter todas elas. A idéia central é escrever $A(t)$ como soma de suas partes simétrica e anti-simétrica e relacionar a segunda com a vorticidade. O leitor deve observar a semelhança deste argumento com a técnica utilizada na Seção 2.1.

Proposição 18 *Dados $\boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{D}(t)$, uma matriz 3×3 simétrica e de traço nulo cujos elementos são funções contínuas, seja $\boldsymbol{\omega}(t)$ a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{D}(t)\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \end{cases} \quad . \quad (3.3)$$

Definindo então

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} + \mathcal{D}(t)\mathbf{x} \quad , \quad (3.4)$$

existe uma pressão quadrática $p(\mathbf{x}, t)$ tal que (\mathbf{v}, p) define solução das equações de Euler e de Navier-Stokes com $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$. Estas são todas as soluções do tipo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x}$.

Demonstração Suponhamos que $A(t)$ seja tal que existe $p(\mathbf{x}, t)$ que, juntamente com

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{x} \quad , \quad (3.5)$$

resolvem (1.16) e (1.9). Escrevamos a matriz $A(t)$ como

$$A(t) = \mathcal{D}(t) + \Omega(t) \quad ,$$

onde $\mathcal{D}(t)$ é simétrica e $\Omega(t)$, anti-simétrica. Vimos na demonstração da Proposição anterior que o traço de A é identicamente nulo. Como o traço de uma matriz anti-simétrica é automaticamente nulo, temos então a igualdade:

$$\text{traço } \mathcal{D}(t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 . \quad (3.6)$$

A decomposição da matriz $P(t)$, definida em (3.1), em suas partes simétrica e anti-simétrica é a seguinte:

$$P = -\rho \left(\frac{d\mathcal{D}}{dt} + \Omega^2 + \mathcal{D}^2 \right) - \rho \left(\frac{d\Omega}{dt} + \mathcal{D}\Omega + \Omega\mathcal{D} \right) .$$

(Omitimos daí o argumento t . Outras vezes ele será omitido sem aviso.) A condição P ser simétrica é então equivalente à equação

$$\frac{d\Omega}{dt} = -[\mathcal{D}(t)\Omega(t) + \Omega(t)\mathcal{D}(t)] . \quad (3.7)$$

(Usamos aí a unicidade da decomposição de uma matriz em partes simétrica e anti-simétrica, como descrito na Seção 1.2)

Usando a proposição anterior, vemos então que, se A é tal que \mathbf{v} em (3.5) define um campo de velocidades solução de (1.16) e (1.9) para alguma pressão p , então suas partes simétrica e anti-simétrica satisfazem (3.6) e (3.7). Reciprocamente, se Ω e \mathcal{D} são matrizes simétrica e anti-simétrica, respectivamente, satisfazendo (3.6) e (3.7), então, com $A = \mathcal{D} + \Omega$, a matriz P definida em (3.1) é simétrica. Donde, usando a proposição anterior, vemos que o campo de velocidades definido em (3.5) é solução de (1.16) e (1.9), para alguma pressão p .

Demonstramos portanto que *todas* as soluções $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ da forma (3.5) são obtidas do seguinte modo. Tome arbitrariamente $\mathcal{D}(t)$ simétrica de traço nulo, para todo $t \geq 0$. Em seguida escolha $\Omega(t)$ satisfazendo (3.7), e faça $A = \mathcal{D} + \Omega$.

Vamos agora reescrever (3.7) como uma equação envolvendo a vorticidade. As partes simétrica e anti-simétrica da matriz-gradiente da velocidade (veja (1.14)), para \mathbf{v} da forma considerada, são precisamente $\mathcal{D}(t)$ e $\Omega(t)$, respectivamente. Segue-se então do Exercício 6, itens (a) e (b), que a derivada de Ω é da forma

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^t$ denota a vorticidade e estamos omitindo o argumento t . Ademais, segue-se do itens (c),(b) e (a) do Exercício 6 a igualdade

$$\mathcal{D}\Omega + \Omega\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ denota o vetor

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\mathcal{D}\boldsymbol{\omega} .$$

A equação (3.7) é então equivalente a ¹

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathcal{D}(t)\boldsymbol{\omega} , \quad (3.8)$$

que sempre pode ser resolvida (ver [55] ou [24], Ap 10), tendo solução única uma vez arbitrado o valor inicial $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0$.

Por fim, usando novamente o Exercício 6, temos a igualdade

$$\Omega(t)\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{x} ,$$

e, daí, obtemos (3.4), como queríamos. ■

Note que os Exemplos 4 e 5 podem ser obtidos imediatamente como casos particulares desta proposição. Basta tomarmos, para o exemplo da deformação, $\mathcal{D}(t) \equiv D$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$; e, para o exemplo da rotação, $\mathcal{D}(t) \equiv 0$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}$. Combinemos agora estes dois exemplos tomando para $\mathcal{D}(t)$ a matriz constante

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} , \quad \gamma > 0 ,$$

e $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$. A solução não mais será estacionária, como vemos em seguida.

E' fácil ver que, para estes dados, a solução de (3.3) é dada por

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, e^{\gamma t}\omega_0)^t . \quad (3.9)$$

Daí obtemos \boldsymbol{v} a partir de (3.4):

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \left(-\frac{1}{2}\gamma x_1 - \frac{1}{2}e^{\gamma t}x_2\omega_0, -\frac{1}{2}\gamma x_2 - \frac{1}{2}e^{\gamma t}x_1\omega_0, \gamma x_3 \right)^t .$$

¹Observe que a equação 3.8 trata-se da equação 2.5 escrita para o campo de velocidades em (3.5). Não estamos usando este fato, entretanto.

As trajetórias das partículas satisfazem portanto as equações diferenciais

$$\begin{cases} x'_1 &= -\frac{1}{2}\gamma x_1 - \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega_0 x_2 \\ x'_2 &= -\frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega_0 x_1 - \frac{1}{2}\gamma x_2 \\ x'_3 &= \gamma x_3 \end{cases} \quad (3.10)$$

Dada uma condição inicial $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$, é imediato resolver a equação para x_3 , obtendo,

$$x_3(t) = \alpha_3 e^{\gamma t} \quad .$$

Usando as duas primeiras equações do sistema acima, verifica-se a igualdade

$$\frac{d}{dt}[e^{\gamma t}(x_1^2 + x_2^2)] = 0 \quad ,$$

donde vem:

$$(x_1^2 + x_2^2)(t) = e^{-\gamma t}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad .$$

Tal como no Exemplo 4, a partícula se afasta rapidamente do plano x_1x_2 , enquanto se aproxima rapidamente do eixo x_3 . Denotando por θ o ângulo do sistema de coordenadas cilíndricas, calculemos a derivada em relação ao tempo de $\theta(x_1(t), x_2(t))$ ao longo de uma trajetória, usando (3.10):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_1x'_2 - x_2x'_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega_0 \quad .$$

Vemos então que, ao contrário do Exemplo 4, onde não havia rotação, aqui as partículas giram em torno do eixo x_3 . Enquanto no Exemplo 5 a velocidade angular era constante, aqui o alinhamento inicial da vorticidade com um auto-vetor de auto-valor positivo da matriz de deformação provoca um crescimento exponencial da velocidade angular.

O fluido deste exemplo comporta-se de maneira semelhante a água escoando pelo ralo de uma pia.

3.2 Distribuição Radial de Vorticidade

Nesta seção obtemos soluções bidimensionais das equações dos fluidos incompressíveis a partir da prescrição da vorticidade como sendo igual a uma função dada que depende só do raio $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Obtemos soluções independentes do tempo para as equações de Euler, e dependentes do tempo para as de Navier-Stokes. Fora o Exemplo 3, este é nosso primeiro exemplo

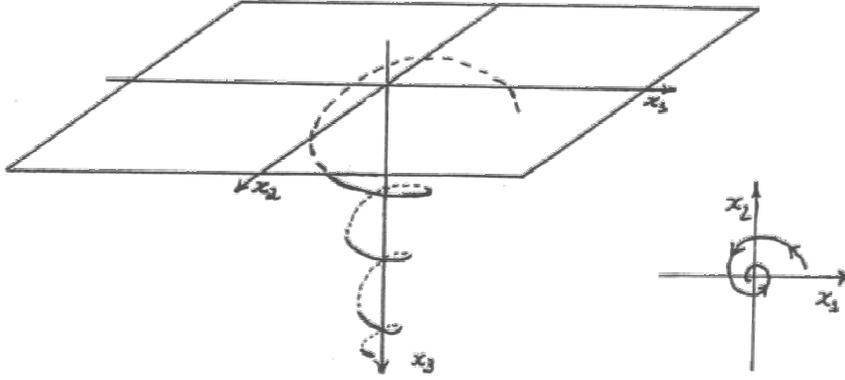


Figura 3.1: Escoamento por um ralo.

genuíno de solução das equações de Navier-Stokes, pois os demais eram exemplos com $\Delta \mathbf{v} \equiv 0$, ou seja, embora a viscosidade estivesse presente, em nada modificava o movimento do fluido.

Vamos obter uma solução do sistema formado pelas equações em (2.5), (2.6) e (2.7), que, como vimos no Capítulo 2, é equivalente às equações de Navier-Stokes (ou Euler, quando $\mu = 0$) para fluidos incompressíveis. A solução de (2.6)-(2.7) que obtemos é bem mais explícita que a lei de Biot-Savart. Graças à bidimensionalidade e à simetria radial, conseguimos desacoplar totalmente (2.5) de (2.6) e (2.7), obtendo uma equação de evolução linear para a vorticidade, independente da velocidade.

Chamamos de *bidimensional* um campo de velocidades da forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t), 0)^t . \quad (3.11)$$

A vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ correspondente a este campo de velocidades fica igual simplesmente a:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \omega(x_1, x_2, t))^t , \quad (3.12)$$

onde

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} .$$

A matriz de deformação

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

tem a terceira linha e a terceira coluna nulas, de modo que o termo $\mathcal{D}\omega$ da equação 2.5 é nulo. A equação vetorial (2.5) resume-se então à equação escalar

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\omega}{\partial x_2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \right) . \quad (3.13)$$

As equações em (2.7) e (2.6) ficam simplificadas, respectivamente, às duas equações seguintes:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \omega . \quad (3.15)$$

Dada uma função $\omega(r, t)$, vamos resolver (3.14) e (3.15) independentemente de (3.13), para em seguida verificar qual equação ω deve satisfazer, como consequência de (3.13). As equações (3.14) e (3.15) podem ser desacopladas introduzindo-se ao problema uma função $\psi(x_1, x_2, t)$ definida pelas equações seguintes.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -v_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = v_1 \quad (3.16)$$

Dados v_1 e v_2 , a integral de linha

$$\int_{(0,0)}^{(x_1,x_2)} (-v_2 dx_1 + v_1 dx_2) \quad (3.17)$$

é independente do caminho (pelo Teorema de Green e (3.14)), definindo então uma função $\psi(x_1, x_2, t)$ tal que as equações em (3.16) são satisfeitas. Substituindo (3.16) em (3.15), obtemos:

$$-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} \right) = \omega . \quad (3.18)$$

Reciprocamente, se a equação acima tem solução, então v_1 e v_2 , definidos por (3.16), satisfazem (3.15). A equação (3.14) também é satisfeita, como consequência de

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2 \partial x_1} ,$$

o que é verdadeiro se ψ for de classe C^2 .

Resolvamos agora (3.18), assumindo que ω é radial, $\omega = \omega(r, t)$, e procurando apenas soluções radiais $\psi(r, t)$. É bem conhecida a fórmula para o laplaciano de uma função radial:

$$-\Delta [\psi(r, t)] = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] (r, t) \quad . \quad (3.19)$$

Integrando em relação a r a equação

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\omega(r, t) \quad ,$$

obtemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \int_0^r s \omega(s, t) ds \quad (3.20)$$

(usamos aí a igualdade

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right|_{r=0} = 0 \quad ,$$

condição necessária para que ψ seja de classe C^2). Calculando $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ pela regra da cadeia, e usando (3.20), segue-se a equação:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2} \int_0^r s \omega(s, t) ds \quad . \quad (3.21)$$

As equações em (3.16) e (3.21) nos levam à solução procurada:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} \int_0^r s \omega(s, t) ds \quad . \quad (3.22)$$

Resolvamos agora (3.13), usando (3.22). Note que (v_1, v_2) é perpendicular a (x_1, x_2) em todos os pontos, o que significa que as trajetórias das partículas são círculos em torno da origem (ou do eixo x_3). Como a função ω é radial, $(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2})$ é paralelo a (x_1, x_2) em todos os pontos. Temos portanto:

$$v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0 \quad .$$

A equação em (3.13) simplifica-se e dá:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \quad . \quad (3.23)$$

Para o caso de fluidos não-viscosos ($\mu = 0$), devemos ter, então, a vorticidade independente do tempo, $\omega = \omega(r)$, dando origem a soluções estacionárias das equações de Euler. Quando $\mu \neq 0$, a equação 3.23 é nossa conhecida equação do calor. Qualquer solução dada pela convolução do núcleo do calor com um dado inicial radial (veja o Apêndice) será também radial (verifique, usando a dica do Exercício 26). Deste modo, podemos arbitrar uma distribuição *inicial* radial de vorticidade $\omega(r, 0)$, resolver (3.23) usando (B.3) e, a partir de (3.22), obter a velocidade. Assim vemos que a presença de viscosidade (atrito) faz com que a vorticidade se difunda, tal como a temperatura. Uma condição inicial de suporte compacto, por exemplo, terá suporte ilimitado após decorrido qualquer intervalo de tempo positivo. E, seja qual for a condição inicial limitada, a vorticidade tende a zero uniformemente quando t tende a infinito (veja o Exercício 99).

A obtenção desta família de soluções dependeu de maneira crucial da introdução da função ψ . Observe que as curvas integrais de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ para t fixo, que coincidem com as trajetórias quando \mathbf{v} não depende do tempo, são as curvas de nível de ψ , consequência de o gradiente de ψ ser perpendicular a \mathbf{v} em todos os pontos.

Há uma interessante ligação entre fluidos bidimensionais e teoria de funções de variáveis complexas. As equações em (3.14) e (3.15) para $\omega = 0$ são as equações de Cauchy-Riemann para a função

$$f(z) = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2) \quad , z = x + iy \quad ,$$

de modo que o conjugado complexo do campo de velocidades de um fluido bidimensional, incompressível, não-viscoso e irrotacional define uma função analítica. A integral complexa de f a partir de um ponto fixo arbitrário define uma função $F = \phi + i\psi$ satisfazendo $F'(z) = f(z)$. A parte real de F satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = v_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = v_2 \quad ,$$

sendo chamada *potencial de velocidade*; e a parte imaginária de F , que coincide com a função ψ definida antes, é chamada *função de corrente*. A teoria de variáveis complexas pode ser usada para obterem-se soluções de problemas de fronteira e informações sobre a interação do fluido com objetos em contacto com ele. (Veja [2, Capítulo 6].)

Apesar de termos assumido regularidade da solução nos cálculos que fizemos, podemos usar a receita obtida tomando $\omega(r)$ não derivável ou até descontínua. Pode-se verificar diretamente substituindo nas equações que a velocidade e a vorticidade assim obtidas são soluções das equações diferen-

ciais nos pontos onde são deriváveis. Veremos nos próximos capítulos generalizações das definições de soluções que permitem interpretar tais funções como possíveis soluções de fato.

Exercício 19 Assumindo $\mu = 0$, obtenha $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e esboce o gráfico do módulo da velocidade como função do raio, considerando: (a) $\omega(r) = (1 + r^2)^{-1}$, (b) (Vórtice de Rankine) $\omega(r)$ igual a 1, se $r \leq 1$, ou zero, caso contrário.

Exercício 20 Mostre que o disco $r \leq 1$ gira como um corpo rígido para o fluido do item (b) do exercício anterior.

Exercício 21 Considere $\mu > 0$ e analise o que ocorre se tomarmos para $\omega(r, 0)$ as funções dadas no Exercício 19.

Exercício 22 Verifique por substituição direta que o campo de velocidades em (3.22) satisfaz as equações em (3.14) e (3.15).

Exercício 23 Convença-se de que a integral em (3.17), multiplicada pela densidade de volume, mede a quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa a superfície cilíndrica de altura unitária e base C , onde C é o caminho de integração. Como o fluido é incompressível, isto justifica fisicamente o fato de o valor da integral ser independente de C .

3.3 Vórtice de Burgers

O campo de velocidades definido em (3.25) e (3.32), juntamente com vorticidade paralela ao eixo x_3 e módulo ω_b dado em (3.30), resolvem as equações da dinâmica da vorticidade (2.5), (2.6) e (2.7). Esta solução é denominada *Vórtice de Burgers*. Esta afirmação pode ser verificada diretamente por substituição. Nesta seção, vemos esta solução aparecer naturalmente, como o limite quando t tende a infinito de certas soluções dependentes do tempo de (2.5), (2.6) e (2.7). Na seção anterior obtivemos soluções destas equações que tendiam a zero para t grande. Falando em termos pouco precisos, podemos dizer que estamos agora superpondo à situação da seção anterior um *jato* (veja o Exemplo 4) que comprime o fluido nas direções dos eixos x_1 e x_2 e o faz expandir-se na direção de x_3 . Quebrada a bidimensionalidade, o termo de convecção da vorticidade $\mathcal{D}\boldsymbol{\omega}$ deixa de ser nulo. Surge então, quando o tempo tende a infinito, o vórtice de Burgers como uma solução de equilíbrio, o resultado da competição entre os três efeitos mencionados

após (2.5). Isto ilustra como pode ser complicado “superpor” soluções de equações não lineares. Se a equação fosse linear, soma de duas soluções seria uma solução.

Este exemplo pode ser olhado como um modelo um pouco mais realista de um “ralo de pia” do que o descrito no final da Seção 3.1. E’ dada uma vorticidade inicial dependente do raio e obtém-se no limite uma vorticidade estacionária, deformada pelo efeito do jato, ao invés de uma vorticidade tendendo a infinito com o tempo, como acontecia na Seção 3.1.

Usamos resultados da seção anterior e da proposição seguinte, demonstrada em dimensão m e aplicada no texto apenas para $m = 2$. Nos exercícios, pedimos que o leitor a aplique, com $m = 1$, para obter a solução denominada “camadas de cisalhamento de Burgers”.

Proposição 24 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta(\mathbf{x} \cdot \nabla)u &= \nu \Delta u + \sigma u \quad , \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad , \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde γ e ν são constantes dadas e u_0 é uma função contínua e limitada. A solução de (3.24) que fica limitada em \mathbf{x} , para todo t , é dada por

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{K}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad ,$$

com \tilde{K}_m dado por

$$\tilde{K}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = K_m \left(e^{-\beta t} \mathbf{x} - \mathbf{y}, \frac{\nu}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right) \quad ,$$

onde K_m denota o núcleo do calor

$$K_m(\mathbf{z}, t) = (4\pi t)^{-m/2} \exp(-|\mathbf{z}|^2 / 4t) \quad .$$

Demonstração Consideremos primeiramente o caso $\sigma = 0$. Fazendo a mudança de variáveis²

$$\boldsymbol{\xi} = e^{-\beta t} \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\nu}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})$$

e usando a regra da cadeia, vem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu e^{-2\beta t} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u \quad ,$$

²Compare com o método das características, (Apêndice A), para equações diferenciais parciais de 1ª ordem.

$$\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u \quad \text{e} \quad \Delta_{\mathbf{x}} u = e^{-2\beta t} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} u \quad .$$

Substituindo na equação diferencial, vemos que o problema de valor inicial que queremos resolver é equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Delta_{\boldsymbol{\xi}} u, \quad u(\boldsymbol{\xi}, 0) = u_0(\boldsymbol{\xi}) \quad ,$$

cuja solução que fica limitada em $|\boldsymbol{\xi}|$ (para cada τ fixo) é dada por

$$u(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_{\mathbb{R}^m} K_m(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}, \tau) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad .$$

(Veja (B.3).) Voltando às variáveis originais, obtemos a solução de (3.24) que fica limitada em $|\mathbf{x}|$ (para cada t fixo):

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^m} K_m \left(e^{-\beta t} \mathbf{x} - \mathbf{y}, \frac{\nu}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad ,$$

o que demonstra a proposição quando $\sigma = 0$. Para obter a fórmula no caso geral, basta notar que $u(\mathbf{x}, t)$ resolve (3.24) com $\sigma = 0$ se, e somente se, $e^{\sigma t} u(\mathbf{x}, t)$ resolve (3.24) para σ arbitrário. ■

Procuremos, agora, soluções das equações da dinâmica da vorticidade que dêem campos de velocidade da forma

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}\gamma x_1 + v_1, -\frac{1}{2}\gamma x_2 + v_2, \gamma x_3 \right)^t \quad , \quad (3.25)$$

onde γ é uma constante positiva e v_1 e v_2 dependem apenas de x_1 , x_2 e do tempo t . A vorticidade é calculada imediatamente, dando:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \omega(x_1, x_2, t))^t \quad , \quad (3.26)$$

onde

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad .$$

Não é por coincidência que obtivemos a vorticidade dada por fórmula idêntica a (3.12), pois para obter (3.25), somamos a (3.11) o campo

$$\left(-\frac{1}{2}\gamma x_1, -\frac{1}{2}\gamma x_2, \gamma x_3 \right)^t \quad ,$$

que tem rotacional e divergente nulos. O divergente da velocidade em (3.25) é dado portanto por

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \quad .$$

Concluimos, assim, que v_1 , v_2 e ω satisfazem (3.14) e (3.15). Sob a hipótese de que

$$\omega \text{ depende só do raio } r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \text{ e do tempo,} \quad (3.27)$$

vimos na seção anterior que v_1 , v_2 e ω estão relacionados pela equação em (3.22). Como já observamos logo após (3.22), isto implica a igualdade

$$v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0 \quad ,$$

de onde segue-se que a derivada material de ω é dada por

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{2}\gamma \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) \quad .$$

E' fácil de ver que o termo de (2.5) responsável pela deformação da vorticidade resume-se a:

$$\mathcal{D}\omega = \gamma\omega \quad .$$

A equação em (2.5) fica, então, livre das incógnitas v_1 e v_2 , apresentando-se como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{2}\gamma \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega + \gamma\omega \quad ,$$

que pode ser resolvida, para uma dada condição inicial contínua e limitada

$$\omega(x_1, x_2, 0) = \omega_0(r) \quad ,$$

usando a Proposição 24 com $\nu = \mu/\rho$, $\sigma = \gamma$ e $\beta = -\gamma/2$. Assim obtemos:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma\rho e^{\gamma t}}{4\pi\mu(e^{\gamma t} - 1)} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[-\frac{\gamma\rho |e^{\gamma t/2} \mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\mu(e^{\gamma t} - 1)} \right] \omega_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad , \quad (3.28)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{y} denotam os vetores (x_1, x_2) e (y_1, y_2) .

E' importante observar que, se ω_0 for uma função dependente apenas de $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, a função definida por (3.28) também terá esta propriedade para cada t (veja Exercício 26). Este fato é consistente com a hipótese que fizemos sobre ω em (3.27): começando com vorticidade radial, ela se mantém radial.

Calculemos agora o limite no infinito de $w(\mathbf{x}, t)$, a fim de obtermos o vórtice de Burgers, como prometemos. E' imediato observar que o limite do que vem entre o sinal de igualdade e o sinal de integração em (3.28) é

igual a $(\gamma\rho/4\pi\mu)$. E' também óbvio que o valor absoluto do integrando é menor ou igual a $|\omega_0(\mathbf{y})|$, para todo t . Para que seja legítima a passagem do limite para dentro do sinal de integração, é suficiente supor que ω_0 satisfaça a hipótese seguinte:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y} < \infty . \quad (3.29)$$

Nestas circunstâncias (com o integrando limitado por uma função de módulo integrável, independente do tempo), o Teorema da Convergência Dominada [3, 4] legitima a troca proposta.³

O leitor deve verificar a igualdade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{\gamma t/2} \mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{e^{\gamma t} - 1} = |\mathbf{x}|^2 .$$

Obtemos então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma\rho}{4\pi\mu} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{\gamma\rho|\mathbf{x}|^2}{4\mu}\right) \omega_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} .$$

Note que, na equação anterior, a exponencial é independente de \mathbf{y} e pode ser sacada fora da integral. Escrevendo a integral de ω_0 em coordenadas polares, e escrevendo r em lugar de $|\mathbf{x}|$, obtemos o que chamamos o Vórtice de Burgers:

$$\omega_b(r) = \frac{\gamma\rho}{2\mu} \exp\left(-\frac{\gamma\rho}{4\mu}r^2\right) \int_0^\infty s\omega_0(s) ds . \quad (3.30)$$

Queremos agora calcular o limite, quando o tempo tende a infinito, de $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ dado por (3.25) com (v_1, v_2) dado pela substituição de (3.28) em (3.22). O limite da parte que depende do tempo é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^r s\omega(s, t) ds , \quad (3.31)$$

com $\omega(s, t)$, $s = |\mathbf{x}|$, dado por (3.28). Gostaríamos de passar o limite para dentro da integral. Para tanto, vamos novamente aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Vê-se facilmente que

$$|\omega(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{\gamma\rho}{4\pi\mu} \frac{e}{e-1} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y} , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 , \quad t \geq \frac{1}{\gamma} .$$

³A Proposição 24 é válida também se a condição inicial u_0 for apenas de valor absoluto integrável, sendo desnecessário supor u_0 contínua e limitada. E' preciso, entretanto, redefinir o que significa a solução assumir a condição inicial (Veja [30, 26]). Usando estes fatos, bastaria supor (3.29) ao longo de toda esta seção.

O lado direito desta desigualdade é uma constante, logo integrável em $[0, r]$, donde se segue que podemos aplicar o TCD e trocar a ordem do limite com a integral em (3.31). Obtemos então,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} \int_0^r s \omega_b(s) ds \quad , \quad (3.32)$$

com ω_b dado em (3.30).

E' razoável esperar que o limite para t tendendo a infinito de soluções de (2.5), (2.6) e (2.7) seja solução estacionária do mesmo sistema. Este é um problema matemático difícil: em geral nem se sabe se a solução existe como função diferenciável para todo t . Para este exemplo que estamos estudando, podemos verificar diretamente que o campo de velocidades dado por (3.25) e (3.32) e a vorticidade $(0, 0, \omega_b)$ resolvem (2.5). E' o que o leitor deve verificar no Exercício 25. Quanto às equações em (2.6) e (2.7), veja o Exercício 22.

Exercício 25 Verifique a afirmação do parágrafo anterior, utilizando a fórmula em (3.19) e o fato de que, como (v_1, v_2) e ω_b se relacionam por (3.22) e ω_b é radial, vale a igualdade

$$v_1 \frac{\partial \omega_b}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega_b}{\partial x_2} = 0 \quad .$$

Exercício 26 Suponha que ω_0 é tal que $\omega_0(R\mathbf{y}) = \omega_0(\mathbf{y})$, para todo \mathbf{y} , e para toda rotação R . Mostre então que $\omega(R\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{x}, t)$, para todo \mathbf{x} , para todo R , com $\omega(\mathbf{x}, t)$ definido em (3.28).

Sugestão - Use os seguintes ingredientes: rotação deixa norma invariante, mudança de variáveis em (3.28) e $\det R = 1$.

Exercício 27 Resolva a integral em (3.28) para ω_0 igual a uma função constante e compare o resultado com (3.9).

Exercício 28 Analogamente ao que fizemos nesta seção, procure soluções das equações de Navier-Stokes da forma

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = (v_1(x_2, t), -\gamma x_2, \gamma x_3) \quad .$$

Note que isto corresponde a superpor à solução do Exemplo 3 um jato (veja Exemplo 4) no plano x_2x_3 que comprime o fluido na direção x_2 e o faz expandir-se na direção x_3 . Calcule o limite quando t tende a infinito para obter as *camadas de cisalhamento de Burgers* [41].

Capítulo 4

Uma Equação de Onda

Interrompemos momentaneamente o estudo das equações de movimento de fluidos incompressíveis para tratar de questões analíticas mais delicadas. Uma solução clássica (ou forte) de uma equação diferencial, é uma função que substituída na equação diferencial resulta numa identidade válida em cada ponto de seu domínio de definição. Necessariamente são diferenciáveis. Esta foi a noção usada nos capítulos anteriores. Por vezes, como veremos neste capítulo, há necessidade de se considerar funções apenas contínuas, ou até mesmo descontínuas, como soluções da equação diferencial. É claro que não adianta tentar substituir uma função não diferenciável na equação diferencial porque isto carece de sentido. Há que repensar os conceitos e, reconsiderando-se a noção de solução, termina-se por introduzir uma noção alternativa de solução a noção de *solução fraca*. Neste capítulo, utilizamos um exemplo para esboçarmos idéias básicas acerca da noção de solução fraca de equação diferencial. Nos capítulos subsequentes estas idéias são retomadas em um contexto mais geral. No próximo capítulo desenvolvemos ferramentas necessárias para estender esta noção a uma classe ampla de equações diferenciais. Retomamos o estudo das equações de Euler e Navier-Stokes no Capítulo 6, inicialmente definindo solução fraca para estas equações.

4.1 O Modelo Clássico

Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad \text{Equação de evolução} \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{Condição inicial} \quad (4.2)$$

Aqui f é um dado do problema. Este PVI é o exemplo mais simples de ondas hiperbólicas e, apesar da sua simplicidade, a qual ficará patente no decorrer desta seção, modela (em uma primeira aproximação), fenômenos dos mais diversos, entre os quais citaremos ondas de tráfego, ondas de glaciares e certos fenômenos em reações químicas, (veja [64, página 6]). Este problema envolve uma equação diferencial parcial linear de 1^a ordem cujo método de resolução é delineado no Apêndice A.

Definição 29 *Uma solução clássica do PVI (4.1, 4.2) é uma função u que satisfaz simultaneamente (a) a condição de regularidade: u contínua em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ e diferenciável em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ e, (b) as equações (4.1, 4.2).*¹

Esboçaremos a resolução deste problema. Para usar o método do Apêndice é necessário que $f \in C^1(\mathbb{R})$, o que assumiremos. A equação diferencial (4.1) é equivalente a impor que a derivada direcional de u na direção $(1, 1)$ no plano (x, t) seja zero. Neste exemplo, as curvas características, paralelas ao vetor $(1, 1)$, são as retas $x - t = c = \text{constante}$. Pela equação diferencial vemos que u é constante ao longo das curvas características. Como estas curvas interceptam o eixo x , a função u terá ao longo de uma característica o mesmo valor que f tem no ponto de interseção dessa característica com o eixo x . Portanto,

$$u(x, t) = f(x - t). \quad (4.3)$$

Traçando o gráfico da solução (4.3) para alguns valores de t , obtêm-se uma idéia do comportamento da solução do PVI (4.1, 4.2), (veja Figura 4.1). Este corresponde à translação de uma onda, para a direita, com velocidade constante e igual a um.

4.2 Crise

Discutimos algumas dificuldades inerentes à noção de solução clássica do PVI. De saída, uma solução clássica terá que ser diferenciável. Isto elimina os candidatos a solução que, embora exibam um comportamento fisicamente correto para o modelo, não são no entanto funções diferenciáveis.

Para efeitos de ilustração, escolhemos f_0 , o contorno do glaciar (não diferenciável) mostrado na Figura 4.2, como condição inicial. Se utilizássemos (4.3) despreocupadamente diríamos que a solução do PVI (4.1, 4.2),

¹Um comentário: Não fosse a imposição da continuidade da solução em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, a função v dada por $v(x, 0) = f(x)$ para x em \mathbb{R} e, $v(x, t) = 0$, $t > 0$, e x em \mathbb{R} seria solução do PVI. Mas esta é uma solução que não é de interesse algum.

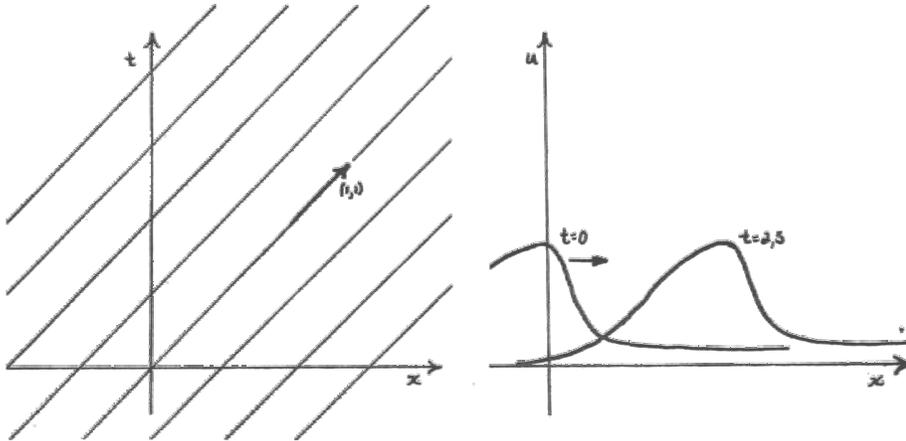


Figura 4.1: a) Curvas características: A solução é constante ao longo das curvas características. b) Onda de translação simples: A solução u corresponde a uma onda transladando, para a direita, com velocidade constante e igual a 1.

com condição inicial f_0 é

$$u_0(x, t) = f_0(x - t). \quad (4.4)$$

Contudo, ao tentarmos verificar se u_0 satisfaz (4.1) notamos que u_0 não é diferenciável, pois f_0 não o é. Apesar de excluídas pelo método de resolução há no entanto motivos de caráter físico e matemático, devido aos quais gostaríamos de considerar condições iniciais apenas contínuas. Apresentados a seguir, estes nos levam ainda a querer aceitar (4.3) por solução do PVI mesmo quando a condição inicial for apenas contínua.

Motivo Físico Pela análise da estrutura das soluções clássicas em (4.3) vemos que, o fenômeno físico modelado pelo PVI, é o de glaciares transladando para a direita com velocidade constante e igual a um. Se quisermos que o PVI (4.1, 4.2) reflita a fenomenologia física deveremos aceitar (4.4) como sua legítima solução.

Motivo Matemático A questão aqui é relativa à estabilidade do modelo. Primeiramente, observamos que podemos aproximar a condição inicial f_0 por uma sequência de condições iniciais diferenciáveis f_ϵ , isto é, podemos construir uma sequência de funções f_ϵ de classe \mathcal{C}^1 tais que

$$f_\epsilon(x) \rightarrow f_0(x), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

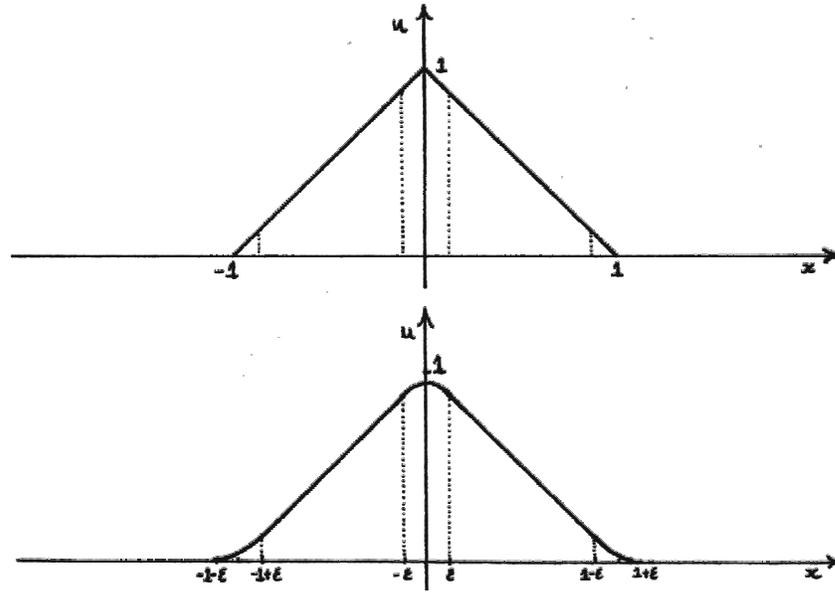


Figura 4.2: a) Glaciar não diferenciável: $f_0(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ b) Aproximação diferenciável do glaciar: $f_\epsilon(x) \rightarrow f_0(x)$.

Figura 4.2b apresenta uma idéia qualitativa de como fazê-lo. (Exercício: Construa explicitamente uma sequência de funções diferenciáveis $\{f_\epsilon\}$ satisfazendo (4.5)). Depois, resolvendo-se o PVI com condição inicial f_ϵ , obtemos a sequência de soluções clássicas do PVI $u_\epsilon(x, t) = f_\epsilon(x - t)$ tais que

$$u_\epsilon(x, t) \rightarrow u_0(x, t), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Finalmente, pelo que ficou dito, e em se desejando a estabilidade do modelo, é necessário que u_0 seja solução do PVI.²

Em suma, de um jeito ou de outro, somos levados a querer aceitar (4.4) como solução do PVI; isto nos obriga a examinar a noção de solução.

4.3 Ruptura

Poderíamos supor que a necessidade de u_0 ser solução com f_0 como condição inicial e, ao mesmo tempo, preservar o modelo matemático expresso pelo PVI são incompatíveis. Na verdade não o são totalmente. A saída passa pelo enfraquecimento dos requerimentos na Definição 29. Reinterpretamos a noção de solução da equação diferencial (4.1) e, conseqüentemente, da noção de solução do PVI. Há várias maneiras de se fazer isto; estas dão origem a noções de solução fraca de equações diferenciais, (veja, por exemplo, [30], principalmente Capítulos 2 a 4). Entre as várias possíveis esboçaremos uma bastante eficiente: a noção de solução no sentido das distribuições. A idéia crucial consiste em se evitar de derivar a função candidata a solução, não obrigando que esta, a ser solução, seja necessariamente diferenciável. Isto será feito através de integração por partes.

Multiplicamos a equação diferencial por uma *função teste* $\phi = \phi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, obtendo:

$$\phi(u_t + u_x) = 0. \quad (4.6)$$

Seja $v = v(x, t)$ uma função diferenciável. Nota-se que a fórmula de *derivada por partes* (ou regra de Leibnitz),

$$(\phi v)_t + (\phi v)_x = \phi(v_t + v_x) + (\phi_t + \phi_x)v, \quad (4.7)$$

²A convergência de u_ϵ a u_0 , de que falamos acima, e também a de f_ϵ a f_0 em (4.5), deveria ser a convergência uniforme, cuja definição será apresentada no próximo capítulo. Para as considerações intuitivas deste capítulo, podemos pensar tratar-se tão somente da convergência pontual. Ou seja, particularizando-se para u_ϵ e u_0 , fixados x e t , $u_\epsilon(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$, denota convergência em \mathbb{R} . No entanto veja Exercício 66b.

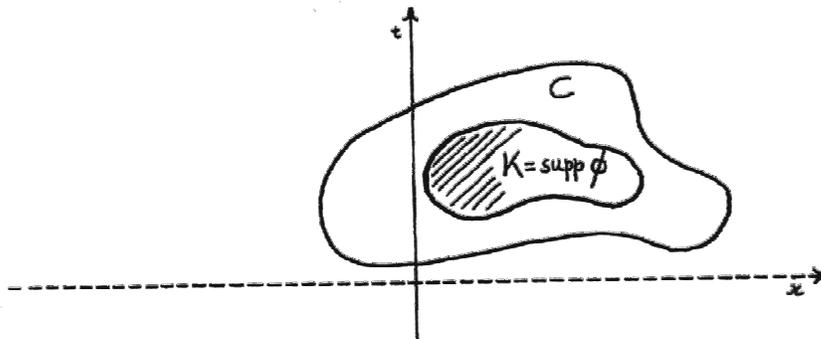


Figura 4.3: $\text{supp } \phi \subset C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

contém o lado esquerdo de (4.6), se aqui substituíssemos v por u . Juntamente de (4.6) e de (4.7) (com u no lugar de v), segue-se a equação

$$(\phi u)_t + (\phi u)_x = (\phi_t + \phi_x) u,$$

a qual, integrada em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, resulta na identidade:

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\phi u)_t + (\phi u)_x] dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t + \phi_x) u dx dt. \quad (4.8)$$

Ora, ϕu tem suporte compacto contido em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Então existirá um conjunto C (indicado na Figura 4.3), contendo estritamente o suporte de ϕu e estritamente contido em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. É evidente que ϕu é zero no complementar do conjunto C e, conseqüentemente, também é zero aí o integrando da integral do lado esquerdo de (4.8); podemos restringir a região de integração da integral do lado esquerdo ao conjunto C . Pelo Teorema da Divergência aplicado ao campo de vetores $(\phi u, \phi u)$ em \mathbb{R}^2 e, porque ϕu se anula na fronteira de C , o lado esquerdo da igualdade acima é zero, portanto

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t + \phi_x) u dx dt = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)). \quad (4.9)$$

Definição 30 *Uma solução fraca do PVI (4.1, 4.2) é uma função u que satisfaz (a) a condição de regularidade: $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, e (b) as equações (4.9, 4.2).*

4.4 Reconciliação

Um espírito crítico haverá de se questionar sobre o cabimento da nova definição. De que mínimas propriedades deverá a nova noção de solução gozar, para que nos predisponhamos a aceitá-la? Nesta seção apresentamos algumas de suas propriedades, as quais a tornam uma noção razoável. A proposição a seguir, por exemplo, mostra que a noção de solução fraca foi capaz de incorporar as críticas apresentadas, aceitando (4.4) como solução do PVI; agora, funções fenomenologicamente corretas são soluções.

Proposição 31 ³ *A função contínua $u(x, t) = f(x - t)$, onde $f \in C^0(\mathbb{R})$, é solução fraca do PVI.*

Demonstração Fazemos a troca de variáveis

$$\begin{aligned} y &= x - t \\ \tau &= x + t \end{aligned}$$

e notamos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) h = 2 \frac{\partial h}{\partial \tau}.$$

(Sobreviva ao abuso de notação! Melhor dizendo, troca de variáveis são funções e, na fórmula acima há composições, não explicitadas, de funções). Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t + \phi_x) f(x - t) dx dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\tau, y) f(y) d\tau dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} [\phi(\tau, y) f(y)] d\tau dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi(\tau, y) f(y)) \Big|_y^{\infty} dy = 0 \end{aligned}$$

Esta última igualdade é obtida, notando-se que ϕ se anula no infinito e na reta $\tau = y$. ■

Fica aqui uma indagação: Se u é uma solução fraca então ela é fenomenologicamente correta? Isto é, existirá g tal que $u(x, t) = g(x - t)$?

O próximo lema foi demonstrado no parágrafo anterior à Definição 30 e, enunciemo-lo aqui por ênfase; este mostra que a noção de solução fraca é uma extensão da noção de solução clássica.

³Compare com Exercício 66b.

Lema 32 (solução clássica \Rightarrow solução fraca) *Se u é solução do PVI no sentido da Definição 29 então também será solução no sentido da Definição 30.*

A noção de solução fraca não introduz soluções diferenciáveis espúrias, posto que uma função diferenciável, que não for solução clássica, não poderá ser solução fraca, como vemos a seguir.

Proposição 33 (solução fraca + regularidade \Rightarrow solução clássica) *Se u for solução fraca e for diferenciável em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, então u será solução clássica.*

A demonstração deste resultado depende do seguinte lema intuitivo, (veja Figura 4.4 e Lima [39]):

Lema 34 *Sejam Ω um aberto em \mathbb{R}^m e f uma função em $C^0(\Omega)$. Assuma que para toda a função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad .$$

Então $f(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Demonstração (da Proposição 33) Por hipótese, u é diferenciável; podemos utilizar a fórmula de derivação por partes (4.7), com u no lugar de v . Integrando-a em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ e, por ϕu ter suporte compacto contido em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, o Teorema da Divergência implica

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t + \phi_x)u dxdt = - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u_t + u_x) dxdt, \quad (4.10)$$

para toda a função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. Como u é uma solução fraca, o lado esquerdo de (4.10) é igual a zero. Finalmente usando Lema 34 com $u_t + u_x$ no lugar de f concluímos que

$$u_t + u_x = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

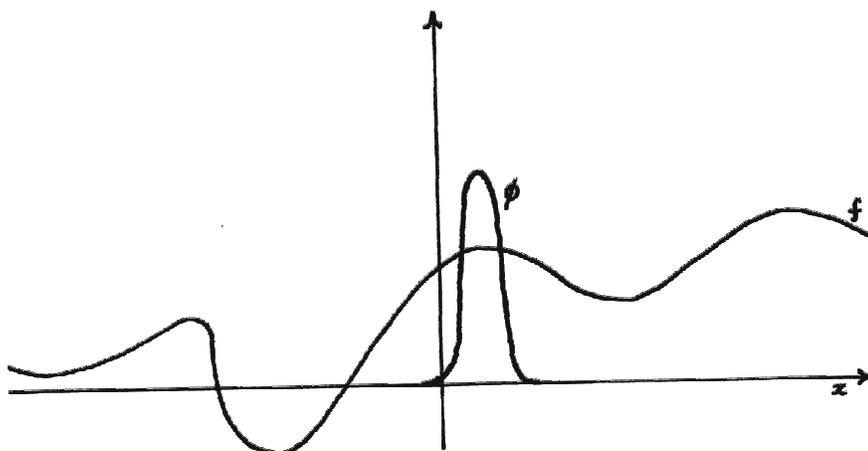


Figura 4.4: Se a função f não é identicamente nula, escolha uma função teste ϕ como sugerido e então, $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x) dx > 0$.

Capítulo 5

Distribuições

No capítulo anterior estendemos a noção de solução (de clássica para fraca) do PVI para uma equação de onda. Nessa extensão acabamos por transferir as derivações, que originalmente atuavam na função solução da equação diferencial, às funções infinitamente diferenciáveis (chamadas ali de funções teste). Com isto evitamos que a solução da equação diferencial tivesse de ser diferenciável. Neste capítulo, com o objetivo de tratar de uma classe ampla de equações diferenciais, elaboraremos mais estas idéias introduzindo a noção de distribuição. Estudaremos alguns exemplos de equações diferenciais parciais lineares e não lineares. No novo contexto, derivadas passam a ser no sentido das distribuições e soluções serão elementos do espaço das distribuições. Faremos uma breve exposição. Os tópicos a serem abordados foram selecionados por sua utilidade no estudo mais aprofundado de Fluidos Incompressíveis, que será levado a cabo nos capítulos subsequentes. Exposições mais sistemáticas podem ser encontradas em [27, 51].

5.1 Convergência em Espaços de Funções

Nesta seção faremos um tratamento rápido e incompleto de convergência em espaços de funções, abordando dois tipos de convergência: a uniforme e a em média quadrática.¹ Estas noções de convergência são fundamentais para a definição ou exemplos de distribuições.

¹Um tratamento sistemático destes assuntos caberia num curso de Análise Funcional; referimos o leitor a [51].

Exemplos de Espaços de Banach

Sejam Λ um aberto limitado em \mathbb{R}^m e $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Lambda})$. Como $|f|$ é uma função contínua definida no compacto $\overline{\Lambda}$ assume aí um máximo. Define-se

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Lambda}} |f(\mathbf{x})|.$$

Matemáticos chamam $\|f\|_\infty$ de norma do *sup* de f ao passo que Físicos e Engenheiros chamam-na de *amplitude* de f . O conjunto $\mathcal{C}^0(\overline{\Lambda})$ munido com a norma do *sup* é um espaço de Banach².

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ definimos $\mathcal{BC}(\Omega)$, o conjunto das funções contínuas e limitadas em Ω .³ A norma do *sup* de $f \in \mathcal{BC}(\Omega)$ é definida por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \Omega\}$, onde $\sup A$ denota o supremo do conjunto $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{BC}(\Omega)$ é, igualmente, um espaço de *Banach* e se Λ é um aberto limitado em \mathbb{R}^m então $\mathcal{BC}(\Lambda) \supset \mathcal{C}^0(\overline{\Lambda})$, isto é dada função função em $\mathcal{C}^0(\overline{\Lambda})$, sua restrição a Λ , pertence a $\mathcal{BC}(\Lambda)$.

(Exercício: Mostre que o recíproco é falso, obtendo uma função em $\mathcal{BC}((0, 1))$ que não possa ser definida continuamente em $[0, 1]$, isto é, que não pertença a $\mathcal{C}^0([0, 1])$).

São fáceis de demonstrar as desigualdades,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{e,} \\ \|fg\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty, \end{aligned} \tag{5.1}$$

a primeira delas sendo conhecida como *Desigualdade Triangular*.

Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em Ω e f_∞ uma função definida no mesmo conjunto. Dizemos que $\{f_n\}$ converge *uniformemente* a f_∞ , quando $n \rightarrow \infty$, (denotando tal por

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f_\infty$$

quando $n \rightarrow \infty$), se e só se, para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, existir um inteiro N_0 tal que para todo o inteiro $n \geq N_0$,

$$|f_n(\mathbf{x}) - f_\infty(\mathbf{x})| < \epsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

O significado intuitivo desta definição é que, dado um tubo de raio $\epsilon > 0$ arbitrário em torno do gráfico de f_∞ , existirá um N_0 tal que se $n \geq N_0$, o gráfico de f_n estará contido no dito tubo, (veja Figura 5.1).

²A definição de espaço de Banach pode ser encontrada em [51].

³ \mathcal{B} e \mathcal{C} são, respectivamente, as iniciais de *bounded* e de *continuous*.

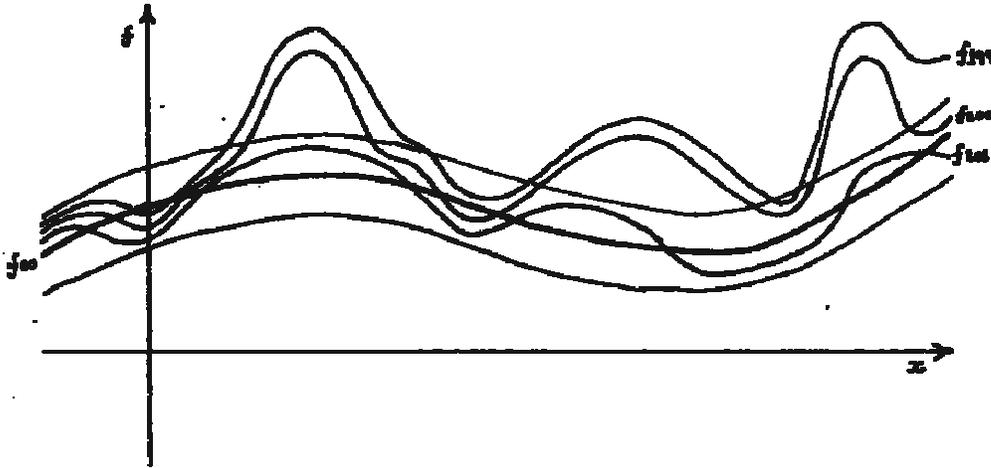


Figura 5.1: Convergência uniforme: Tubo de raio ϵ em torno do gráfico da função limite f_∞ . Nesta figura, $N_0 = 201$.

Fica como exercício verificar que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $\{f_\infty\}$,

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

se e somente se convergir na *norma* do sup,

$$\|f_n - f_\infty\|_\infty \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Exercício 35 Considere a sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ definidas em $[-\pi, +\pi]$. a) Mostre que

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

b) Verifique que a sequência das derivadas não converge uniformemente para função alguma, isto é, mostre que *não existe* g tal que:

$$\frac{df_n}{dx} \xrightarrow{\text{unif}} g, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Exemplo 36 Se $u_n \xrightarrow{\text{unif}} u_\infty$, quando $n \rightarrow \infty$, então $\|u_n\|_\infty$ é limitada uniformemente em n , isto é, existe um *majorante* $M > 0$ tal que $\|u_n\|_\infty \leq M$,

para todo n .

Demonstração Pela Desigualdade Triangular,

$$\|u_n\|_\infty = \|u_n - u_\infty + u_\infty\|_\infty \leq \|u_n - u_\infty\|_\infty + \|u_\infty\|_\infty.$$

O termo $\|u_n - u_\infty\|_\infty$ é limitado uniformemente para todo o n em \mathbb{N} porque $\|u_n - u_\infty\|_\infty \rightarrow 0$. Daí, o resultado se segue. ⁴ ■

Quando o assunto é cálculo vetorial é preciso usar, às vezes, o conjunto $\mathcal{BC}(\Lambda, \mathbb{R}^k) = [\mathcal{BC}(\Lambda)]^k = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^t; u_i \in \mathcal{BC}(\Lambda)\}$, ou seja, o espaço das funções contínuas com valores em \mathbb{R}^k , e limitadas coordenada a coordenada. Neste espaço, a noção de convergência na norma do *sup*, é entendida como sendo a convergência, coordenada a coordenada, na norma do *sup* definida no início desta subseção. Isto é, a sequência $\{\mathbf{f}_n\} \subset \mathcal{BC}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ converge a $\mathbf{f}_\infty \in \mathcal{BC}$, quando $n \rightarrow \infty$, na norma do *sup*, se e só se,

$$(f_i)_n \xrightarrow{\text{unif}} (f_i)_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, k.$$

Um Espaço de Hilbert

Denota-se por $\mathcal{L}^2(\Omega)$ o conjunto das funções com quadrado integrável, ⁵ ou seja, o conjunto das funções f tais que:

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 dx < \infty.$$

A norma \mathcal{L}^2 de uma função $f \in \mathcal{L}^2$ é:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dados f_∞ em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ e uma sequência $\{f_n\}$ de funções em \mathcal{L}^2 , diz-se que $\{f_n\}$ converge para f_∞ em \mathcal{L}^2 (ou em *média quadrática*) se,

$$\|f_n - f_\infty\|_2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

⁴Note que este resultado só depende da Desigualdade Triangular, sendo portanto válido em contextos mais gerais.

⁵Integrais têm, por vezes, que ser entendidas no sentido de *Lebesgue*, mas os leitores não familiares com esse assunto podem, para o que se segue, assumir que as integrais são no sentido de *Riemann* apesar de que o mais correto seria considerá-las, ao invés, integrais à *Lebesgue*. Ao leitor interessado indicamos [4] que contém uma introdução, bastante agradável, à teoria de *Lebesgue*. No entanto, veja Capítulo 9.

Quando isto ocorre, denota-se:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Os exercícios que se seguem ilustram quão diferentes são os dois conceitos de convergência apresentados nesta seção.

Exercício 37 Verifique que a sequência

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1/n^3 \\ n^4x + n & \text{se } -1/n^3 \leq x < 0 \\ -n^4x + n & \text{se } 0 \leq x < 1/n^3 \\ 0 & \text{se } x \geq 1/n^3 \end{cases}$$

converge, em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, para a função identicamente nula, apesar do fato de $\|f_n\|_\infty$ tender a infinito.

Exercício 38 Dê exemplo de uma sequência de funções contínuas, pertencentes também a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, tal que

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0,$$

ao passo que $\|f_n\|_2$ não converge a zero.

A situação exemplificada no exercício 38 só é possível em domínios ilimitados, como vemos a seguir.

Lema 39 *Sejam Ω aberto limitado, $\{f_n\}$ e f_∞ em $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ e, assuma que*

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então também temos:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \|f_n - f_\infty\|_2^2 &= \int_{\Omega} |f_n(\mathbf{x}) - f_\infty(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \|f_n - f_\infty\|_\infty^2 \int_{\Omega} d\mathbf{x} \\ &\leq \|f_n - f_\infty\|_\infty^2 \text{volume}(\Omega) \end{aligned}$$

Como o volume de Ω é finito, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\|_\infty = 0,$$

conclui-se (5.2). ■

Sejam f e g funções em $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Define-se o *produto interno* entre f e g , através da integral abaixo:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

É claro que (f, g) é finito uma vez que $2|f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \leq (f(\mathbf{x}))^2 + (g(\mathbf{x}))^2$. Além disso, vale a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*.⁶

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad ,$$

para f e g em $\mathcal{L}^2(\Omega)$.⁷ O conjunto $\mathcal{L}^2(\Omega)$ munido com o produto interno acima é um espaço de Hilbert⁸.

Mais geralmente, definimos $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^k) = [\mathcal{L}^2(\Omega)]^k = \{(f_1, \dots, f_k)^t, f_i \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$. Dado $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ a função f_i é a i -ésima componente de \mathbf{f} e, a *norma* \mathcal{L}^2 de \mathbf{f} é:

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^k (f_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Definindo-se o produto interno entre duas funções em $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ por

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x})g_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad ,$$

temos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz apropriada:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \|\mathbf{f}\|_2^2 \|\mathbf{g}\|_2^2. \tag{5.3}$$

⁶A Desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida em qualquer espaço vetorial com produto interno. (Veja [8]).

⁷O leitor deve comparar este resultado com a desigualdade (5.1), válida no espaço de Banach $\mathcal{BC}(\Omega, \mathbb{R})$; por vezes são usadas para obter resultados análogos nos espaços de atuação respectivos.

⁸Consulte [51, página 42, Exemplo 2] para uma prova deste resultado.

5.2 Funções Teste e Distribuições

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^m . O espaço das funções teste $\mathcal{D}(\Omega)$, é o conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência para sequências apresentada a seguir. Dada uma função $\psi_\infty \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e dada também uma sequência $\{\psi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ diz-se que $\{\psi_n\}$ converge, em $\mathcal{D}(\Omega)$, a ψ_∞ se e só se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

a) As funções ψ_n , para todo n , e ψ_∞ têm suporte contido num mesmo compacto.

b) A sequência $\{\psi_n\}$ e as sequências das derivadas parciais (de todas as ordens) convergem uniformemente, ou seja, para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (Z_+)^m$,

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} \psi_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \xrightarrow{\text{unif}} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} \psi_\infty}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad (5.4)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

(Note que $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ pode ser $(0, \dots, 0)$ e, neste caso (5.4) corresponde à convergência uniforme de ψ_n a ψ_∞ .)

A convergência de $\{\psi_n\}$ a ψ_∞ em $\mathcal{D}(\Omega)$ é denotada por:

$$\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, ao nos referirmos a $\mathcal{D}(\Omega)$ escrevemos, por vezes, \mathcal{D} .

Um *funcional linear* T definido em \mathcal{D} é uma função linear com valores em \mathbb{R} e domínio \mathcal{D} , $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos por $\langle T, \phi \rangle$ o valor de T calculado em ϕ . Diz-se que T é *contínuo*, sendo então chamado de *distribuição* se, para toda a sequência $\{\psi_n\}$ convergindo a ψ_∞ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tivermos que

$$\langle T, \psi_n \rangle \rightarrow \langle T, \psi_\infty \rangle, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

(A convergência na fórmula acima é em \mathbb{R}). O conjunto das distribuições (ou das *funções generalizadas*) em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

É fácil mostrar que um funcional linear T é contínuo se e só se,

$$\langle T, \phi_n \rangle \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para toda a sequência $\{\phi_n\}$ indo a zero em $\mathcal{D}(\Omega)$. Verifique.

Dada uma distribuição T em Ω diz-se que T *se anula* no subconjunto aberto A de Ω se $\langle T, \phi \rangle = 0$ para toda a função teste ϕ em $\mathcal{C}_0^\infty(A)$.⁹ Seja

⁹Cometeu-se aqui um ligeiro abuso de notação. Estritamente falando, não podemos avaliar T em $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(A)$ pois ϕ não é um elemento de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. No entanto, para a extensão $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ de ϕ , definida por $\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$ se $\mathbf{x} \in A$ e $\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = 0$ se $\mathbf{x} \in \Omega \setminus A$ podemos calcular $\langle T, \tilde{\phi} \rangle$. É esta quantidade que, por abuso, denotamos por $\langle T, \phi \rangle$.

Λ a união de todos os subconjuntos abertos de Ω nos quais T se anula; este é o *maior* subconjunto aberto no qual T se anula. Define-se o *suporte* de T como sendo o complementar de Λ , isto é, $\text{supp } T = \Omega \setminus \Lambda$.

Veremos alguns exemplos de distribuições e determinaremos seus suportes.

Exemplo 40 (Funções contínuas) Dada f em $\mathcal{C}^0(\Omega)$, define-se o funcional i_f pela fórmula abaixo

$$\langle i_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega). \quad (5.5)$$

Mostraremos que i_f é contínuo.

Demonstração Dada sequência

$$\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

seja K um compacto tal que $\text{supp } \psi_n \subset K$, para todo n . Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_K f(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\psi_n\|_{\infty} \int_K |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Já que o valor da integral de uma função contínua num compacto é finito, e desde que ψ_n converge a zero uniformemente, o lado esquerdo da desigualdade acima converge a zero quando $n \rightarrow \infty$. Concluimos que i_f é contínuo. ■

Observação: Na demonstração acima usamos apenas que $\psi_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$, não tendo sido necessário usar que as suas derivadas também convergem uniformemente a zero.

Fica como exercício verificar que $\text{supp } i_f = \text{supp } f$, onde $\text{supp } f$ denota o suporte da função contínua f . (Recordamos que o *suporte* de uma função contínua é o fecho do conjunto onde a função é não nula).

Exercício 41 Dadas f e g contínuas, use lema 34 para mostrar que se $i_f = i_g$ então $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para todo \mathbf{x} .

O exercício anterior permite-nos considerar as funções contínuas como um subconjunto das distribuições, pois a aplicação

$$\begin{aligned} i : \mathcal{C}^0(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto i_f \end{aligned}$$

é injetiva.

Exemplo 42 (Distribuição de Heaviside) A função de Heaviside dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é descontínua. O funcional linear conhecido por *distribuição de Heaviside* é dado por

$$\langle H, \phi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \phi(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Seu suporte é o intervalo $[0, \infty)$.

A distribuição de Heaviside é um exemplo de uma classe mais ampla de distribuições. Diz-se que f é uma função *localmente integrável*, se

$$\int_K |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$$

para todo o compacto K contido em Ω . (O conjunto das funções localmente integráveis em Ω é denotado por $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$). Os mesmos argumentos usados para funções contínuas permitem definir a distribuição i_f através da fórmula 5.5, mesmo quando f é apenas localmente integrável. O resultado, correspondente ao Lema 34 para funções localmente integráveis, é de demonstração bem mais difícil. (Veja, por exemplo, [27, página 45]). Com este resultado podemos garantir que a aplicação $\mathcal{L}_{loc}^1 \ni f \mapsto i_f \in \mathcal{D}'$ é injetora, o que permite considerar as distribuições como “funções generalizadas”, (justificando assim esta denominação alternativa). Para simplificar a notação denotaremos, às vezes, i_f por f .

(Exercício: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-\alpha}$ pertença a $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ onde, $\Omega = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$, ou \mathbb{R}^3 . Dica: em \mathbb{R}^2 use coordenadas polares e, em \mathbb{R}^3 , coordenadas esféricas.)

Exemplo 43 (Distribuição delta de Dirac) A famosa distribuição δ de Dirac, introduzida pelo físico teórico P. M. Dirac no início da década de 30, e dada por

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(\mathbf{0}), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m), \quad (5.6)$$

é conhecida pelos Físicos e Engenheiros por função δ de Dirac.¹⁰ Para verificar que (5.6) define, de fato, uma distribuição basta notar que a sequência $\{\psi_n\}$ tender a zero uniformemente, implica, em particular, que $\psi_n(\mathbf{0}) \rightarrow 0$.

¹⁰O leitor encontrará em Braun [9, págs. 241-244] uma proveitosa discussão sobre o emprego da distribuição de Dirac no estudo de forças impulsivas, elucidando o papel físico fundamental desta distribuição.

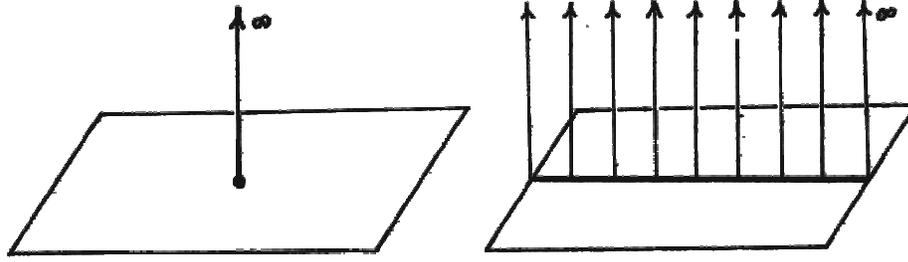


Figura 5.2: a) Distribuição δ de Dirac: O suporte é a origem. Nesta representação da distribuição δ temos a indicação de onde ela está concentrada, (seu suporte). b) Distribuição de Dirac ao longo do eixo x_1 em \mathbb{R}^2 .

Aqui cabe um comentário. Há distribuições que são definidas através de integração *contra* uma função, isto é, distribuições da forma $J = i_f$ para alguma função $f \in \mathcal{L}_{loc}^1$. Neste sentido dizemos que a distribuição J está *naturalmente* associada à função f . A chamada *função* δ de Dirac não está associada a uma função. Contudo, Físicos e Engenheiros gostam de pensar que ela é uma função que é zero em todo o \mathbb{R}^m menos na origem onde vale infinito. Além disso, esse infinito seria um infinito especial de tal forma que a “integral” da “função” δ fosse um. Esta concepção é usualmente esquematizada como na Figura 5.2a. Prosseguiremos um pouco mais nessa maneira pouco formalizada de pensar na distribuição de Dirac. Dada uma função não negativa, definida em \mathbb{R}^m , interpretamo-la como a uma densidade de massa. Assim ao integrarmos dita função numa região limitada do espaço obtemos um número que corresponderia à massa contida nessa região do espaço. No contexto de densidades e de massas, a distribuição de Dirac descreveria uma situação limite em que toda a massa estivesse concentrada num ponto; teria “densidade infinita” na origem, correspondente ao caso de uma partícula pontual de massa um. A formalização matemática destas idéias intuitivas foge aos objetivos destas notas, no entanto algo da situação limite aludida acima estará presente no Capítulo 7. Foi o matemático francês Laurent Schwartz quem definiu a noção de distribuições. Esta se verificou uma noção profunda e a Teoria das Distribuições conseguiu incorporar a aparentemente contraditória “função” delta de Dirac (afinal uma função que é zero em todos os pontos menos na origem tem integral nula, não importa qual o valor que assuma na origem), desta vez como um funcional linear, permitindo realizar, em bases matemáticas corretas, os cálculos que Dirac fazia com sua “função”, bem como também formalizava o chamado “Cálculo

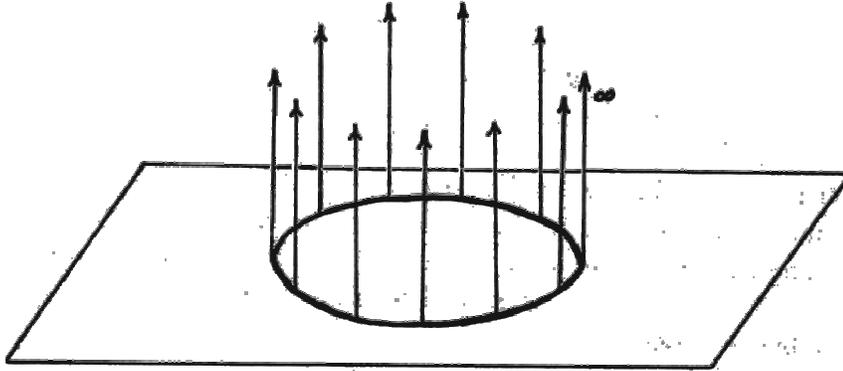


Figura 5.3: Distribuição uniforme no círculo unitário em \mathbb{R}^2 : Esta distribuição está concentrada no círculo.

de Heaviside”, introduzido por Heaviside.

Os funcionais lineares definidos nos dois exemplos a seguir de certa forma generalizam a distribuição delta. Estes funcionais estão “concentrados” em outros conjuntos que não a origem. Fica como exercício verificar que, de fato, são distribuições.

Exemplo 44 (Distribuição δ ao longo de uma reta) A distribuição L dada pela fórmula abaixo, tem suporte na reta x_1 em \mathbb{R}^2 , $\text{supp} L = \mathbb{R} \times \{0\}$. Veja Figura 5.2b.

$$\langle L, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x_1, 0) dx_1, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Exemplo 45 (Distribuição uniforme no círculo unitário) A distribuição abaixo tem suporte no círculo unitário em \mathbb{R}^2 , (veja Figura 5.3), $\text{supp} C = \mathcal{S}^1$, onde $\mathcal{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

$$\langle C, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Exemplo 46 (Funções em \mathcal{L}^2) Dada uma função f em \mathcal{L}^2 , o funcional linear

$$\langle i_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

é contínuo.

Demonstração Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência convergente em $\mathcal{D}(\Omega)$ e ϕ_∞ seu limite. Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle i_f, \phi_n \rangle - \langle i_f, \phi_\infty \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) (\phi_n(\mathbf{x}) - \phi_\infty(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|f\|_2 \|\phi_n - \phi_\infty\|_2. \end{aligned}$$

Como $\{\phi_n\}$ e ϕ_∞ têm suporte no mesmo compacto, pelo Lema 39 segue-se a continuidade de i_f . ■

Na verdade uma função f em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ pertence também a $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz com as funções f e 1 para demonstrar isto. Assim, o exemplo acima é redundante já que é um caso particular do caso mais geral: $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Define-se $\mathcal{L}^2_{loc}(\Omega)$, o conjunto das funções com quadrado localmente integrável, isto é, funções tais que

$$\int_K |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} < \infty$$

para todo o compacto $K \subset \Omega$.

(Exercício: Verifique que se $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ então f e f^2 estão em \mathcal{L}^1_{loc} e, portanto, definem as distribuições i_f e i_{f^2}).

A noção de convergência em \mathcal{D} é extremamente exigente, tendo como consequência a exígua quantidade de sequências convergentes. Assim, será relativamente pouco o que deverá ser satisfeito, para um funcional linear ser contínuo. Consequentemente, o espaço \mathcal{D}' terá uma quantidade enorme de elementos; entre estes, haverá os que possibilitem a descrição de uma situação física complexa. Por isto, procuraremos soluções para as equações diferenciais no conjunto \mathcal{D}' . Haverá mais probabilidade de existir solução, devido à própria imensidão de \mathcal{D}' , contudo nem sempre é garantida a existência de soluções. (É bom frisar que, em certos problemas, algumas das soluções em \mathcal{D}' podem não ser de interesse algum).

5.3 Derivação

Iremos considerar neste capítulo, em seções mais adiante, equações diferenciais em \mathcal{D}' . Isto nos solicita a introdução da definição de derivada de uma distribuição. Com este intuito, vejamos inicialmente como se relacionam as distribuições i_f e $i_{\partial f / \partial x_j}$, associadas a uma função derivável f e à sua derivada parcial $\partial f / \partial x_j$.

Para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $f \in C^1(\Omega)$ escrevemos a fórmula de derivação por partes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\phi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\phi + f\frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

Notamos que o lado esquerdo da identidade acima é o divergente do campo de vetores $w = f\phi\mathbf{e}_j$, (veja Exercício 15). Integramos a identidade acima na região Ω . Pelo Teorema da Divergência e como $f\phi$ se anula na fronteira, devido à compacidade do suporte de $f\phi$, temos que:¹¹

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\phi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f\frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\mathbf{x} . \quad (5.7)$$

Daí, segue-se:

$$\left\langle i\frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle i f, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall \phi \in C_0^\infty. \quad (5.8)$$

É natural então a definição de derivada em relação a x_j de uma distribuição T .

Definição 47 (Derivada) *Para $T \in \mathcal{D}'$ a distribuição $\partial T/\partial x_j$ definida por*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall \phi \in C_0^\infty$$

é a derivada parcial de T em relação a x_j .

Fica como exercício verificar que $\partial T/\partial x_j$ definido acima é, de fato, uma distribuição. Convença-se também que (5.8) significa que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} i f = i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \text{ se } f \in C^1(\Omega).$$

Aplicando sucessivas vezes a definição, definem-se as derivadas parciais de qualquer ordem de uma distribuição. Como caso particular seja f uma função localmente integrável; podemos calcular suas derivadas de qualquer

¹¹Alternativamente, desconhecendo-se o Teorema da Divergência para \mathbb{R}^m com $m > 3$, pode-se utilizar o argumento mais elementar esboçado a seguir. Defina

$$(f\phi)\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \text{supp } \phi \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

em um retângulo contendo o suporte de ϕ , use o Teorema Fundamental do Cálculo na integral em relação a x_j e, obtenha (5.7). Verifique os detalhes.

ordem no sentido das distribuições. Para isto, toma-se a distribuição i_f e deriva-se i_f como distribuição. Assim, a função de Heaviside é derivável no sentido das distribuições.

Os exemplos a seguir serão deixados como exercício.

Exemplo 48 a) Em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ temos:

$$\frac{dH}{dx} = \delta.$$

Use $x = 0$ como ponto para “quebrar” determinada integral em duas.

b) Define-se a função de Heaviside no plano,

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

A distribuição $\partial H / \partial x_2$ é igual à distribuição L definida no exemplo 44.

Exemplo 49 (O laplaciano) a) [unidimensional] Considere a função contínua $F(x) = \frac{1}{2}|x|$. É fácil mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= H - \frac{1}{2} , \text{ e} \\ \Delta F &= \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dx} \right) = \delta . \end{aligned}$$

b) [bidimensional] Considere a distribuição em \mathbb{R}^2 ,

$$\langle F, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} F(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

onde

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|.$$

É possível mostrar-se que¹²

$$\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \delta.$$

Podemos considerar também o laplaciano tridimensional, veja Exercício 53.

Por fim, mostramos como traduzir a noção de solução fraca do PVI apresentada no capítulo anterior, para a linguagem das distribuições. Seja $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$; então

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

no sentido das distribuições é o funcional linear J definido por:

$$\langle J, \phi \rangle = - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t + \phi_x) u(x, t) dx dt.$$

Notamos que $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ é solução fraca do PVI do capítulo anterior (veja definição 30) se e só se (4.2) é satisfeito e se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

como distribuições, ou seja, quando as derivadas acima são interpretadas no sentido das distribuições.

5.4 Cálculo Vetorial

Distribuições Vetoriais

A descrição de uma ampla gama de fenômenos físicos requer a utilização de funções vetoriais. Nesta subseção definiremos “funções vetoriais generalizadas”, ou distribuições vetoriais. Os operadores diferenciais clássicos, o

¹²Esta afirmação é bem mais difícil de justificar do que a anterior; consulte o excelente texto de Gustafson [26], ou algum outro livro de equações diferenciais parciais. Antes veja Exemplo 54. Os pontos cruciais aqui são que: a) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, temos que: $\Delta \log |\mathbf{x}| = 0$ classicamente. b) O campo de vetores $\nabla \log |\mathbf{x}|$ está definido classicamente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e, seu fluxo através do círculo de raio R centrado na origem, (veja definição de fluxo no Exemplo 54), é independente de R . Isto é, a integral

$$\int_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{n} \cdot \nabla \log |\mathbf{x}| dl \quad ,$$

não depende de R . Aqui $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, para $\mathbf{x} \neq 0$ é o vetor unitário normal ao círculo, apontando para fora.

gradiente, o rotacional, o divergente e o laplaciano, atuando em funções vetoriais generalizadas, são apresentados.

Definimos $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k) = [\mathcal{D}(\Omega)]^k = \{(\phi_1, \dots, \phi_k)^t, \phi_i \in \mathcal{D}(\Omega)\}$; os elementos de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, são então naturalmente identificados com funções no conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Uma seqüência $\{\psi_n\}$ converge a ψ_∞ em $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ quando $n \rightarrow \infty$, (denotado por

$$\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_\infty,$$

quando $n \rightarrow \infty$), se e só se, convergir coordenada a coordenada, isto é, se

$$(\psi_i)_n \xrightarrow{\mathcal{D}} (\psi_i)_\infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, k.$$

O conjunto $[\mathcal{D}'(\Omega)]^k$, chamado de *Espaço das Distribuições Vetoriais*, é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Por definição $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_k)^t$ é um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$, se e só se $T_j, j = 1, \dots, k$, as *componentes* de \mathbf{T} , pertencem a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cada $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$ define naturalmente um funcional linear contínuo em $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, através da fórmula:

$$\langle \mathbf{T}, \phi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle T_j, \phi_j \rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k).$$

O *suporte* de \mathbf{T} é, por definição, a união dos suportes de suas componentes, $\text{supp } \mathbf{T} = \cup_{j=1}^k \text{supp } T_j$.

Uma classe de distribuições vetoriais é dada pelo conjunto das funções vetoriais cujas componentes estão em \mathcal{L}_{loc}^1 ,

$$\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R}^k) = [\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)]^k = \{(f_1, \dots, f_k)^t, f_j \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)\}.$$

Assim, dado \mathbf{f} em $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, definimos $i_{\mathbf{f}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$ pela fórmula

$$\langle i_{\mathbf{f}}, \phi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle i_{f_j}, \phi_j \rangle, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k).$$

Por simplicidade, denotamos $i_{\mathbf{f}}$ por \mathbf{f} . Definimos também,

$$\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega, \mathbb{R}^k) = [\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)]^k = \{(f_1, \dots, f_k)^t, f_j \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)\},$$

sendo imediato verificar que

$$\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R}^k).$$

Os operadores diferenciais clássicos, ∇ , rot , div , Δ atuam nas distribuições da maneira natural. Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$, e $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3)$, (onde Ω é um aberto em \mathbb{R}^3), temos:

a) O *gradiente* de T :

$$\nabla T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^t \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

b) O *rotacional* de \mathbf{v} :

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv ((\text{rot } \mathbf{v})_1, (\text{rot } \mathbf{v})_2, (\text{rot } \mathbf{v})_3)^t \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

onde

$$(\text{rot } \mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$$

com ϵ_{ijk} definido na seção 1.3.

c) O *divergente* de \mathbf{v} :

$$\text{div } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}).$$

d) O *laplaciano* de T :

$$\Delta T = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}).$$

Exercício 50 Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ e, $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Verifique as identidades abaixo:

a) $\langle \nabla T, \phi \rangle = - \langle T, \text{div } \phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$

b) $\langle \text{rot } \mathbf{v}, \phi \rangle = \langle \mathbf{v}, \text{rot } \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. (O sinal não está errado).

c) $\langle \text{div } \mathbf{v}, \phi \rangle = - \langle \mathbf{v}, \nabla \phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

d) $\text{rot } \nabla T = \mathbf{0}$

e) $\text{div } \nabla T = \Delta T$

f) $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$

Veamos um exemplo: Dizemos que $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ é *incompressível* no sentido das distribuições se \mathbf{u} é solução da equação diferencial parcial (EDP)

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad ,$$

em palavras, se as distribuições do lado esquerdo e direito da equação acima forem iguais. Usando o Exercício 50c, concluímos que \mathbf{u} será incompressível no sentido das distribuições se e somente se:

$$\langle \mathbf{u}, \nabla \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dada uma função $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos a distribuição produto, denotada por aT , pela fórmula:

$$\langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Fica como exercício verificar que aT é, de fato, uma distribuição.

Exercício 51 Seja $d \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$, a função característica do complementar do disco unitário aberto em \mathbb{R}^2 ,

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a distribuição

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) i_d \quad ,$$

determine seu suporte e relacione-a com a distribuição definida no exercício 45.

Exercícios e Exemplo

Exercício 52 Calcule o divergente e o rotacional, no sentido das distribuições, dos campos de vetores dados abaixo. (É conveniente que se desenhem os campos de vetores). Calcule também o suporte das distribuições resultantes.

a) (Folha unidimensional de vorticidade) Para o campo de velocidades dado abaixo, o eixo x_1 é chamado de *folha de vorticidade*, ele é o suporte da distribuição $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, (veja Figura 5.4):

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (H(x_1, x_2) + 1, 0)^t$$

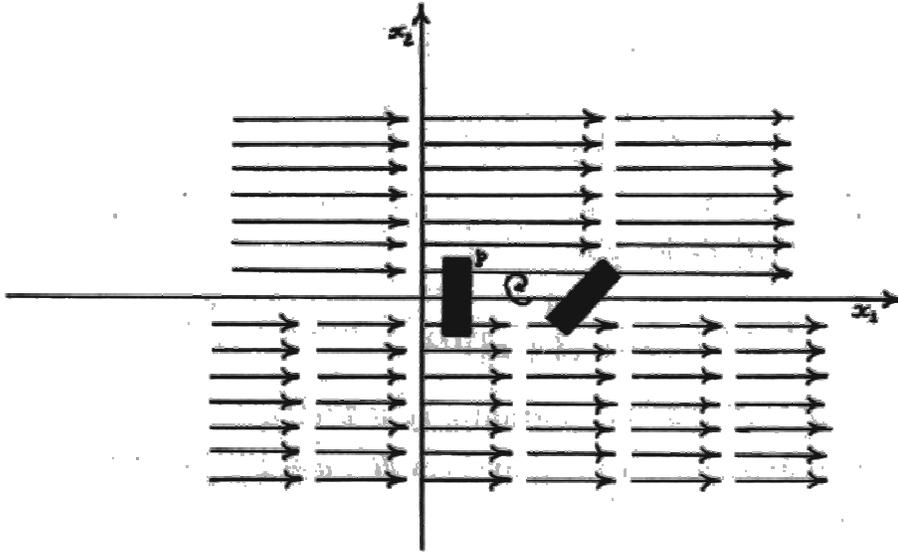


Figura 5.4: *Folha de vorticidade*. O eixo x_1 é uma folha unidimensional de vorticidade, pois há aí concentrado uma “tendência” de rotação; colocando-se um pedaço de madeira p no fluido, este tenderá a girar uma vez que, acompanhando o fluxo, sua parte superior percorrerá, de início, uma distância maior que a parte inferior.

Observação: lembramos que o rotacional de um campo de vetores em \mathbb{R}^2 é o escalar $\text{rot } \mathbf{v} = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$.

b) (Folha de vorticidade) Seja H a função descontínua definida em \mathbb{R}^3 da seguinte forma: $H(\mathbf{x}) = 1$ se $x_2 \geq 0$ e, $H(\mathbf{x}) = 0$ se $x_2 < 0$. Mais apropriadamente do que no item a, o plano $x_1 x_3$ é denominado folha de vorticidade do campo de velocidades

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (H(x_1, x_2) + 1, 0, 0)^t.$$

c) (Vórtice pontual) O campo de velocidades abaixo é incompressível no sentido das distribuições. Sua vorticidade justifica ser denominado de *vórtice pontual*. Temos

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^t \text{ e}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\pi\delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

(Dica: Compare com Exemplo 54 e use as idéias lá apresentadas).

d) (Filamento de vorticidade) Comentários análogos aos feitos no item c caberiam aqui, para o campo de velocidades

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)^t.$$

Exercício 53 Sejam F e \mathbf{u} , respectivamente, a função e o campo de vetores definidos em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ dados por:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

a) Mostre que $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ e, portanto, $i_F \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Mostre que \mathbf{u} é localmente integrável em \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, definindo a distribuição i_u em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

c) Mostre que o fluxo de \mathbf{u} através da esfera de raio R (que é a fronteira da bola de raio R), dado pela integral

$$\int_{\partial B_0(R)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

é independente de R . Aqui, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície $\partial B_0(R)$ apontando para fora.

d) Mostre que

$$\nabla i_F = i_u.$$

e) Mostre que $\operatorname{div} i_u = 4\pi\delta$. (Consulte [26, seção 1.6.1]).

f) Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ é um *cone* (centrado na origem) se, para todo elemento \mathbf{a} em K e $t \geq 0$, também $t\mathbf{a}$ está em K . Um *cone suave* é um cone cuja interseção com a esfera unitária tem fronteira suave, (a fronteira é uma curva de classe \mathcal{C}^1 , veja Figura 5.5a). O *ângulo sólido* determinado pelo cone suave K é, por definição, a área da superfície de interseção do cone K com a esfera unitária. Seja M uma superfície com bordo e assuma que os raios partindo da origem interceptem M em no máximo um ponto. Defina K , o cone formado pelos raios que interceptam M , como mostrado na Figura 5.5b. Assuma que K é um cone suave. Mostre que

$$\text{ângulo sólido de } K = \int_{K \cap \partial B_0(1)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

e que também é igual a:

$$\int_M \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

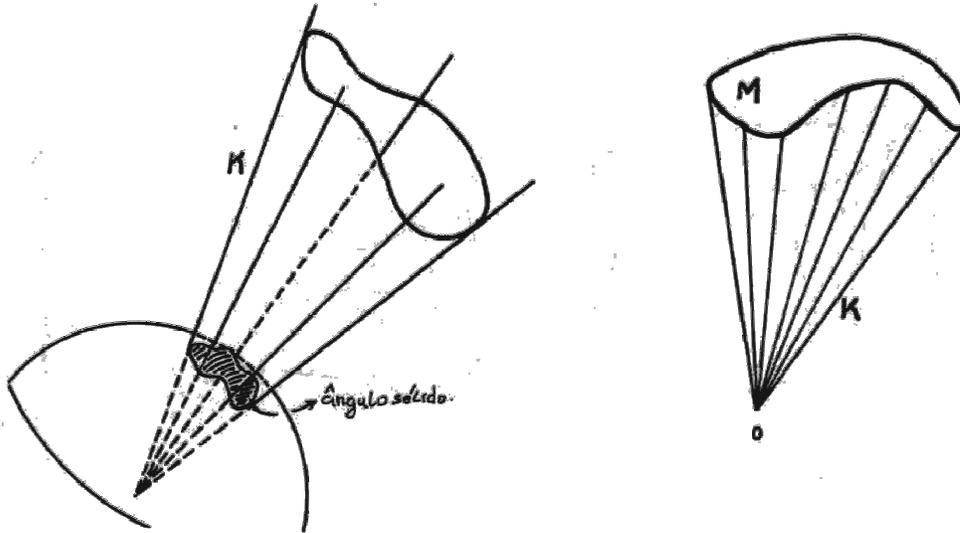


Figura 5.5: (a) Cone suave: O Ângulo sólido é a área da interseção do cone com a esfera unitária. (b) Cone K determinado por superfície M .

(Dica: Use o Teorema da Divergência). Compare este resultado com o caso particular apresentado no item c.

Exemplo 54 (Dois vórtices pontuais em rotações contrárias) Apenas esboçaremos as idéias principais. Os detalhes, por vezes não muito fáceis, ficam a cargo do leitor. Este exemplo é o caso bidimensional do qual o exercício a seguir é o caso tridimensional.

Preliminares Geométricos: Dados um campo de vetores \mathbf{u} diferenciável, definido em um aberto A (em \mathbb{R}^3), uma curva orientada e sem autointerseção C , e uma superfície H , fechadas e suaves, definimos:

$$\text{Circulação de } \mathbf{u} \text{ em } C: \quad \Gamma_C = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (5.9)$$

$$\text{Fluxo de } \mathbf{u} \text{ através de } H: \quad \Lambda_H = \int_H \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.10)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal a H , \mathbf{t} é um vetor unitário e tangente a C (compatível com a orientação de C), e ainda, dS é o elemento de área da superfície, e dl é o elemento de comprimento da curva.

Duas curvas C_0 e C_1 são *homotópicas* em A se uma puder ser transfor-

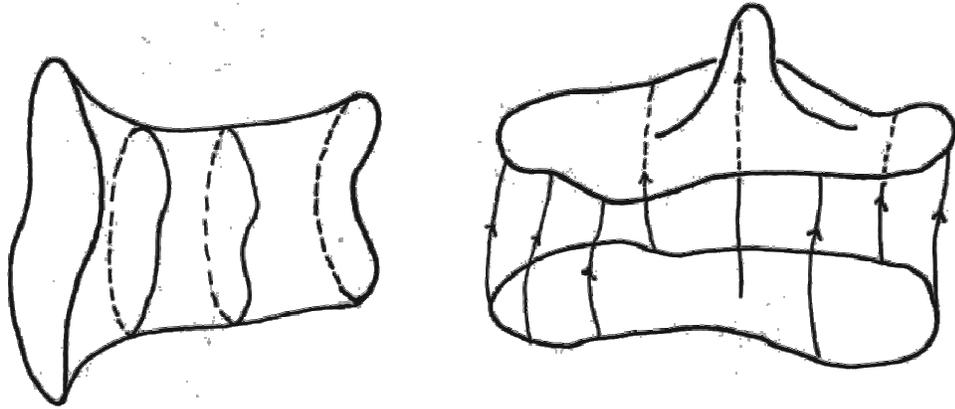


Figura 5.6: Deformação contínua de curvas e superfícies. a) Curvas homotópicas b) Superfícies homotópicas.

mada na outra através de uma deformação contínua em tempo finito.¹³ A noção de homotopia define uma relação de equivalência no conjunto das curvas fechadas em A .

Assuma que \mathbf{u} é um campo de vetores irrotacional em A , isto é, $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ classicamente em A . Use o Teorema de Stokes para mostrar que as circulações de \mathbf{u} em duas curvas homotópicas são iguais. (Veja Figura 5.6a).

Analogamente, diz-se que as superfícies H_0 e H_1 são *homotópicas* em A se uma puder ser “levada” na outra através de um movimento contínuo em tempo finito.¹⁴ (Veja Figura 5.6b). Use o Teorema da Divergência para mostrar que dado \mathbf{u} , um campo de vetores incompressível (classicamente), seu fluxo através de uma superfície é uma constante em cada *classe de homotopia* de superfícies em A , (uma classe de homotopia é um conjunto de superfícies homotópicas entre si).

Para campos de vetores definidos em subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 , semelhante desenvolvimento é possível, mas como desta vez não há superfícies, apenas curvas, fluxos serão através de curvas, isto é, dados C e \mathbf{u} , respecti-

¹³Exemplo: O círculo de raio 1 centrado em $(0,0)$, e o de raio 2 centrado em $(5,0)$, não são homotópicos nem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, nem em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$, mas o são em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 0\}$.

¹⁴Por exemplo, as esferas de raio 1 com centro em $(0,0,0)$ e em $(5,0,0)$, não são homotópicas em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ nem em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(2, x_2, x_3) \mid x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ mas o são em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(2, 0, 0)\}$ e em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(2, 0, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$.

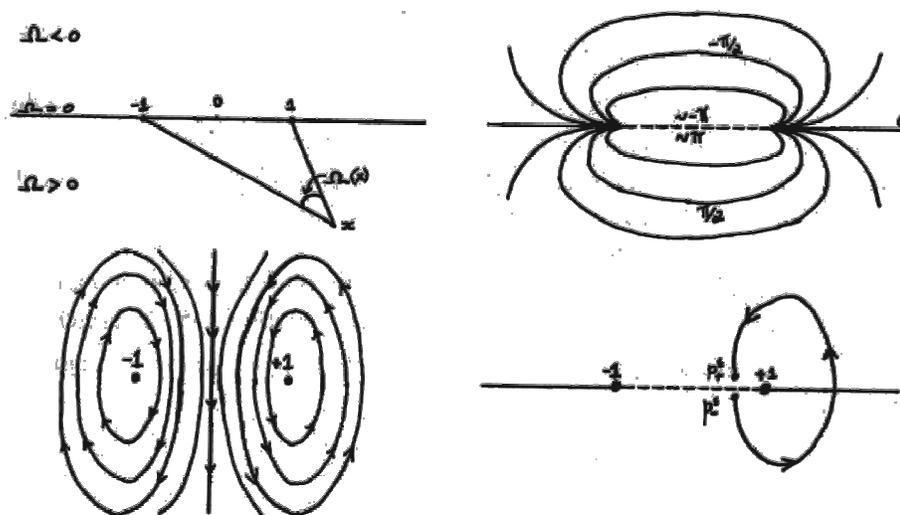


Figura 5.7: Dois vórtices em rotações contrárias. (a) A função Ω . (b) Curvas de nível de Ω . (c) O campo de velocidades $\mathbf{v} = -\frac{1}{2\pi}\nabla\Omega$ é perpendicular às curvas de nível de Ω . (d) A curva C_ϵ .

vamente uma curva fechada e um campo de vetores em $A \subset \mathbb{R}^2$, define-se o fluxo de \mathbf{u} através de C , pela fórmula:

$$\Gamma_C = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl \quad ,$$

onde \mathbf{n} denota o vetor unitário normal exterior a C .

Definição do campo de vetores do exemplo: Dado um ponto (x_1, x_2) em $\mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$, seja $\Omega(x_1, x_2)$ o ângulo do setor circular formado pelas semi-retas que passam pelos pontos (x_1, x_2) e $(-1, 0)$, e pelos pontos (x_1, x_2) e $(1, 0)$, como mostrado na Figura 5.7a. (Convencionamos que o ângulo será positivo se $x_2 < 0$. Seja ainda $G(\mathbf{x}) = \log |\mathbf{x}|$ e defina $\mathbf{u} = \nabla G = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$. Use o Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2 para mostrar que

$$\Omega(\mathbf{x}) = \int_{|y-x|=1} \mathbf{u}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, dl_y \quad (5.11)$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{-x_2}{(y_1 - x_1)^2 + (x_2)^2} \, dy_1 \quad . \quad (5.12)$$

(A integral acima pode ser resolvida explicitamente).

A função Ω é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$. Ademais, Ω tem uma descontinuidade de salto em $[-1, 1] \times \{0\}$, isto é, (veja Figura 5.7b)

$$\Omega(p_+^\epsilon) - \Omega(p_-^\epsilon) \rightarrow -2\pi, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (5.13)$$

onde p_+^ϵ e p_-^ϵ são sequências de pontos em \mathbb{R}^2 que se aproximam de um mesmo ponto p^0 em $(-1, 1) \times \{0\}$, respectivamente, com valores positivos e negativos da segunda coordenada. O campo de vetores $\mathbf{v} = -\frac{1}{2\pi} \nabla \Omega$ (onde o gradiente é calculado classicamente) tem uma extensão diferenciável (ainda denotada por \mathbf{v}) definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$. (Veja Figura 5.7c. Os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são chamados de *singularidades* do campo \mathbf{v}). Mais ainda, \mathbf{v} é um elemento de $\mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(Exercício: Obtenha, explicitamente, o campo de velocidades \mathbf{v} , calculando primeiro a integral em (5.12). Compare-o com o item c do Exercício 52.)

Enunciado do Exemplo: No sentido das distribuições, valem as seguintes identidades:

$$\text{rot } \mathbf{v} = -\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)} \quad (5.14)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (5.15)$$

onde δ_a , denota a translação da distribuição δ pelo vetor \mathbf{a} , isto é,

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \langle \delta, \phi(\cdot + \mathbf{a}) \rangle = \phi(\mathbf{a}), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty.$$

Fatos cruciais: Equação 5.14 é consequência de:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \text{ classicamente em } \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\} \quad (5.16)$$

$$\text{A circulação em torno de } C, \Gamma_C = -1, 1, \text{ ou } 0, \quad (5.17)$$

conforme a curva C dê uma volta (no sentido anti-horário) (a) em torno apenas da singularidade $(-1, 0)$, (b) apenas em torno de $(1, 0)$ ou (c) exclua ambas as singularidades. Verifique (5.16).

Esboço da demonstração de 5.17: Seja C uma curva que dá uma volta em torno de $(1, 0)$. Sejam C_ϵ , p_+^ϵ e p_-^ϵ , como mostrados na Figura 5.7d, então, usando (5.13), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_C &= \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dl \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dl \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} [\Omega(p_+^\epsilon) - \Omega(p_-^\epsilon)] = 1. \end{aligned}$$

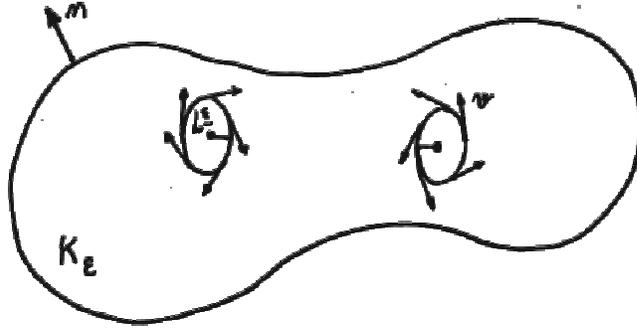


Figura 5.8: $K_\epsilon = K \setminus (L_+^\epsilon \cup L_-^\epsilon)$. O campo de vetores é tangente ao bordo de L_+^ϵ e de L_-^ϵ .

De forma análoga faríamos os outros cálculos. ■

Esboço da demonstração de 5.14: Defina um conjunto L_+^ϵ como mostrado na Figura 5.8, gozando das seguintes propriedades: L_+^ϵ é um subconjunto de $B_{(1,0)}(\epsilon)$, e o campo de vetores \mathbf{v} é tangente à fronteira de L_+^ϵ . Analogamente define-se L_-^ϵ , desta vez contendo $(-1, 0)$. Sejam ϕ uma função teste, K um compacto, com fronteira suave, contendo o suporte de ϕ , e $K_\epsilon = K \setminus (L_+^\epsilon \cup L_-^\epsilon)$, (veja Figura 5.8). Em K_ϵ , o campo de vetores \mathbf{v} é diferenciável e podemos aplicar a *regra de Leibnitz*,

$$\text{rot}(\phi\mathbf{v}) = -(\nabla\phi)^\perp \cdot \mathbf{v} + \phi \text{rot} \mathbf{v}, \quad \text{em } K_\epsilon,$$

onde $\mathbf{u}^\perp = (u_2, -u_1)^t$; segue-se da identidade acima e de (5.16) que:

$$\text{rot}(\phi\mathbf{v}) = -(\nabla\phi)^\perp \cdot \mathbf{v}, \quad \text{em } K_\epsilon. \quad (5.18)$$

Usando a definição do rotacional (no sentido das distribuições), o Teorema da Divergência, o da Convergência Dominada (veja seção 3.3) e equação 5.18, segue-se que:

$$\begin{aligned} \langle \text{rot} \mathbf{v}, \phi \rangle &= -\langle v_2, \partial_{x_1} \phi \rangle + \langle v_1, \partial_{x_2} \phi \rangle \\ &= -\int_K \nabla \phi^\perp \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\int_{K_\epsilon} \nabla \phi^\perp \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{K_\epsilon} \text{rot}(\phi\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{K_\epsilon} \operatorname{div}(\phi \mathbf{v}^\perp) d\mathbf{x} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\epsilon} \phi \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{n} dl \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial L_+^\epsilon} \phi \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\partial L_-^\epsilon} \phi \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{n} dl \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left(\int_{\partial L_+^\epsilon} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\partial L_-^\epsilon} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl \right). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Pela definição de L_+^ϵ e de L_-^ϵ , tem-se que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ não muda de sinal em cada uma das fronteiras destes conjuntos (sendo não-negativa na fronteira de L_+^ϵ e não-positiva na de L_-^ϵ), donde:

$$\left| \int_{\partial L_+^\epsilon} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl - \phi(1,0) \right| \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\partial L_+^\epsilon} (\phi(\mathbf{x}) - \phi(1,0)) \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl \right| \\
&\leq \sup \{ |\phi(\mathbf{x}) - \phi(1,0)|, \mathbf{x} \in \partial L_+^\epsilon \} \left| \int_{\partial L_+^\epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl \right| \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Como ϕ é contínua e a fronteira ∂L_+^ϵ está contida em $B_{(1,0)}(\epsilon)$, segue-se de 5.17 e 5.21 que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial L_+^\epsilon} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dl = \phi(1,0) \quad .$$

Com argumentos análogos para a outra singularidade e aplicando este resultado a (5.19), obtemos, por fim, que:

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \phi \rangle = -\phi(-1,0) + \phi(1,0) \quad .$$

Comentários sobre 5.15: Equação 5.15 é consequência de (a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ classicamente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ e (b) o fluxo através de qualquer curva (incluindo ou não as singularidades de \mathbf{v}), é nulo.

Condição b é fácil verificar para as curvas em torno de uma singularidade cujas tangentes são paralelas ao campo \mathbf{v} . Para as restantes é consequência da invariância do fluxo (de um campo incompressível) através de curvas homotópicas. Os detalhes ficam por conta do leitor.

Exercício 55 (Filamento circular de vorticidade) ¹⁵ Seja $\Omega(\mathbf{x})$ o ângulo sólido do cone (denotado por K_x) formado pelas semi-retas partindo de \mathbf{x} e

¹⁵Compare este exercício com Exercícios 5.31, 5.32, 5.33 de [56], que tratam do número de ligação entre duas curvas.

interceptando o *disco unitário*

$$D_0(1) = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\},$$

veja Figura 5.9a. Considere as funções $F(\mathbf{x}) = -1/|\mathbf{x}|$ e $\mathbf{u} = \nabla F$ definidas em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(a) Mostre que

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}) &= \int_{\partial B_x(1) \cap K_x} \mathbf{u}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{D_0(1)} \mathbf{u}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 \, dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

e, obtenha uma fórmula mais explícita para a integral acima substituindo \mathbf{u} por sua expressão analítica.

(b) Mostre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Omega(p_+^\epsilon) - \Omega(p_-^\epsilon)] = -4\pi$$

onde p_+^ϵ e p_-^ϵ são pontos se aproximando de p^0 (que pertence ao disco $D = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$), com as terceiras coordenadas, respectivamente, positiva e negativa, (veja Figura 5.9).

(c) Considere o campo de vetores

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \Omega \quad ,$$

definido classicamente em $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}^1$ onde aqui, $\mathcal{S}^1 = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$. Seja c uma curva que intercepte o disco D uma única vez orientada de tal forma que o seu vetor tangente tenha terceira componente negativa quando a curva interceptar o disco D , como mostrado na Figura 5.10a. Use (b) para mostrar que circulação do campo \mathbf{v} em c é um.

(d) Tomando como base como foram escolhidas as regiões L_+^ϵ e L_-^ϵ no Exercício 54, é possível escolher-se uma região R_ϵ com fronteira suave, contendo os pontos de “singularidade” do campo \mathbf{v} , (isto é, contendo \mathcal{S}^1), tal que o campo de vetores \mathbf{v} seja tangente à fronteira de R_ϵ . (Veja Figura 5.10b). Mostre que o fluxo de \mathbf{v} através da fronteira de R_ϵ é nula. Mais ainda, mostre que se R é uma região qualquer cuja fronteira é uma superfície suave, contendo em seu interior \mathcal{S}^1 , então o fluxo de \mathbf{v} através da fronteira de R é nulo.

(e) Considere a distribuição C em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ definida pela fórmula: ¹⁶

$$\langle C, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(\cos \theta, \sin \theta, 0) \, d\theta \quad .$$

¹⁶Compare esta distribuição com aquela definida no Exemplo 45.

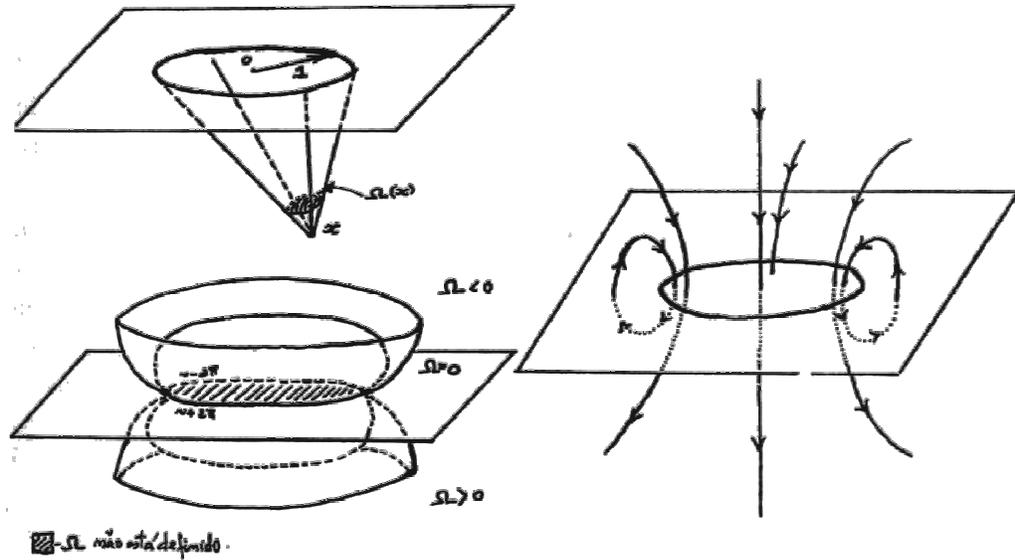


Figura 5.9: (a) A função Ω . (b) Esboço das superfícies de nível de Ω . (c) Esboço do campo de vetores $\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi}\nabla\Omega$.

Defina a distribuição vetorial em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, o *anel ou filamento circular* de vorticidade, pela fórmula:

$$A = (-x_2, x_1, 0)^t C \quad .$$

Calcule o suporte de A . (Veja Figura 5.10c).

(f) Mostre que \mathbf{v} satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais parciais em \mathcal{D}' :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{v} = A \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Distribuições Tensoriais

A dedução das equações de Navier-Stokes na Seção 1.1 e também o Exercício 7 exibiu a participação, na formulação da dinâmica dos fluidos, de funções definidas no espaço tempo cujos valores são matrizes quadradas. Por isto, nesta subseção incorporamos à nossa linguagem a noção de *distribuições matriciais* ou *tensoriais*.

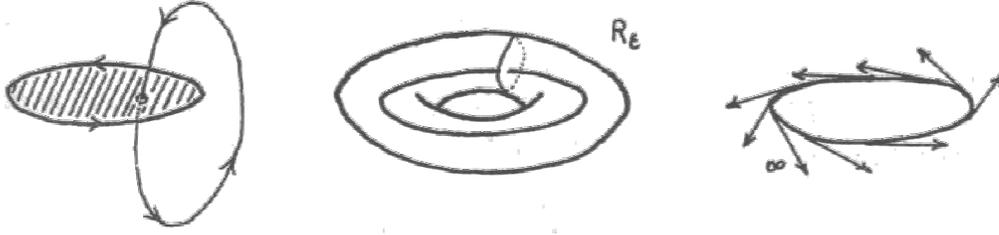


Figura 5.10: (a) Duas curvas com número de ligação não nulo. (b) Região tipo toro em torno das singularidades do campo \mathbf{v} : R_ϵ (c) Anel de vorticidade.

O *produto tensorial* $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ entre dois vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} em \mathbb{R}^k , é a matriz cujas entradas são: $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$, para $1 \leq i, j \leq k$. O *produto tensorial*¹⁷ de \mathbb{R}^k com \mathbb{R}^k , denotado por $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k$, é definido como sendo o conjunto das matrizes quadradas $k \times k$ obtidas a partir de combinações lineares finitas de produtos tensoriais de vetores em \mathbb{R}^k , isto é,

$$\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k = \left\{ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l a_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^k, 1 \leq i, j \leq k \right\}.$$

Os elementos de $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$ são chamados de tensores. É claro que dada uma matriz arbitrária A em $M(k)$ (onde $M(k)$ denota o conjunto das matrizes quadradas $k \times k$), nem sempre é possível determinarmos \mathbf{u}, \mathbf{v} em \mathbb{R}^k tais que $A = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. No entanto, é fácil ver que $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k$ coincide com $M(k)$, (basta notar que $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, $1 \leq i, j \leq k$ formam uma base para $M(k)$). Em $M(k)$ definimos o produto interno dado por:

$$A : B = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_{ij} B_{ij} \quad .$$

No conjunto das *funções teste matriciais*,

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k) = \{A : \Omega \rightarrow M(k), A_{ij} \in C_0^\infty(\Omega)\} \quad ,$$

dizemos que uma sequência converge se e só se convergir coordenada a coordenada em $\mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ o conjunto das matrizes

¹⁷É possível definir-se o produto tensorial entre dois espaços vetoriais de uma maneira mais intrínseca sem o relacionarmos diretamente com matrizes, veja [63].

quadradas $k \times k$ cujas entradas são distribuições, ou seja, a matriz T é um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ se e só se T_{ij} , $1 \leq i, j \leq k$, as entradas de T , são elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ e, $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ definimos o funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ pela fórmula

$$\langle T, \Phi \rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle T_{ij}, \Phi_{ij} \rangle .$$

O conjunto $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$ é chamado de espaço das distribuições tensoriais. Definimos o divergente de uma distribuição tensorial T ,

$$\text{Div } T = \begin{pmatrix} \text{div } T_1 \\ \text{div } T_2 \\ \text{div } T_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3) ,$$

onde T_i denota a distribuição vetorial dada pela i -ésima linha de T .

(Exercício: Mostre que

$$\langle \text{Div } T, \phi \rangle = - \langle T, \nabla \phi \rangle , \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k) \quad (5.22)$$

onde $\nabla \phi$ é a matriz das derivadas parciais de 1ª de ϕ , $(\nabla \phi)_{ij} = \partial \phi_i / \partial x_j$).

5.5 A Equação de Burgers

Veremos nesta seção como usar a linguagem das distribuições no estudo de equações diferenciais não-lineares. Em geral, não é possível definir-se o produto de duas distribuições. Isto poderia ser um empecilho ao uso de distribuições no estudo das equações não-lineares. No entanto, se nos restringirmos a certas classes de equações não-lineares e a certos subconjuntos das distribuições ainda poderemos usar a noção de derivada no sentido das distribuições para definir solução fraca de equações diferenciais não-lineares. Ilustraremos o procedimento através de um exemplo.

A equação diferencial não-linear

$$u_t + uu_x = 0, \quad (5.23)$$

pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (5.24)$$

Diz-se que (5.24) está escrita na *Forma de Divergência*.¹⁸ Equação (5.23) é conhecida como equação de Burgers sem viscosidade¹⁹.

Definição 56 Uma função $u \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é uma solução fraca da equação de Burgers sem viscosidade se a equação 5.24 for satisfeita no sentido das distribuições, isto é, se (5.24) for uma identidade em \mathcal{D}' .

Lembramos aqui que u e u^2 são elementos de $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ uma vez que $u \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Além disso, equação 5.24 é satisfeita no sentido das distribuições, se e somente se

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x dx dt = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

E' mais ou menos claro como estender a noção de solução fraca a outras EDP's não lineares que possam ser escritas em Forma de Divergência. Não o faremos, (no entanto veja o próximo capítulo).

Há vezes em que esta noção de solução fraca é abrangente demais, no sentido que admite para solução funções que, por algum motivo externo ou não à EDP, não consideramos razoável aceitá-las como suas soluções. Por exemplo, podemos estar interessados em algum PVI, e a questão de existência de solução única pode nos levar a aceitar por soluções do PVI, apenas aquelas soluções fracas que satisfaçam algum outro requisito. O leitor interessado é referido a [36, 13, 35] onde estes assuntos são tratados no contexto de problemas hiperbólicos²⁰, (como é o caso do PVI para a equação de Burgers sem viscosidade).

¹⁸Associada a certas equações diferenciais, há uma forma de divergência, que no entanto não é única. Multiplicando-se equação (5.23) por u , obtemos a equação na forma de divergência $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) = 0$. Os resultados que podem ser obtidos variam consoante a forma de divergência empregada. Considerações físicas são por vezes úteis na determinação de qual forma de divergência deve ser escolhida. (Veja [64]).

¹⁹A equação de Burgers $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ é um modelo unidimensional simples para a equação de Navier-Stokes. Foi estudada por Burgers [10] em 1948 com este propósito, (posto que incorpora um termo não linear e um termo difusivo típicos).

²⁰Na situação analisada em [13, 35, 36], os candidatos a solução fraca tem que, adicionalmente, satisfazer *condições de entropia* para serem considerados soluções *fisicamente* relevantes.

Exercício 57 (choques) ²¹ Considere a função descontínua u dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e, & \text{se } x < c(t) \\ u_d, & \text{se } x \geq c(t) \end{cases} \quad (5.25)$$

onde $c = c(t)$ é uma função diferenciável e u_e, u_d são constantes. Mostre que u será solução fraca da equação de Burgers sem viscosidade na Forma de Divergência (5.24) se e só se $c(t)$ satisfaz a relação de Rankine-Hugoniot:

$$\llbracket u \rrbracket \frac{dc}{dt} = \left[\left[\frac{u^2}{2} \right] \right]. \quad (5.26)$$

Aqui $\llbracket f(u) \rrbracket$ denota o salto da quantidade $f(u)$ quando se cruza a linha $(c(t), t)$ da esquerda para a direita, isto é, $\llbracket f(u) \rrbracket = f(u_d) - f(u_e)$. ²²

(Dica: Divida o \mathbb{R}^2 pela linha $(c(t), t)$. Use derivação por partes e o Teorema da Divergência).

Mais geral, e até preferivelmente, por tornar a notação um pouco mais limpa, mostre a relação de Rankine-Hugoniot,

$$\llbracket u \rrbracket \frac{dc}{dt} = \llbracket f(u) \rrbracket,$$

para a solução (5.25) da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0.$$

Exercício 58 Seja $u(x, t)$ uma solução positiva ($u(x, t) > 0$) de classe \mathcal{C}^2 da equação do calor unidimensional,

$$u_t = \mu u_{xx} \quad \text{para } t > 0.$$

Verifique que se $u(x, 0) = f(x) > 0$, para x em \mathbb{R} , então $u(x, t)$ dado por (B.1) é uma solução positiva. Mostre que a transformação de Cole-Hopf $u \mapsto \theta = -2\mu u_x/u$ leva soluções positivas da equação do calor, em soluções da equação de Burgers com viscosidade, isto é, θ satisfaz:

$$\theta_t + \theta \theta_x = \mu \theta_{xx} \quad \text{para } t > 0 .$$

²¹O objetivo deste exercício é deduzir a relação de Rankine-Hugoniot (5.26). Notamos que qualquer constante satisfaz a equação de Burgers sem (ou com) viscosidade. Tomando uma atitude simplista, podemos perguntar se será possível obter-se solução que seja constante em cada uma das, digamos, duas regiões em que tenhamos subdividido o espaço-tempo. A resposta é que é possível obter-se solução *fraca* desde que a relação de Rankine-Hugoniot seja satisfeita na “interface” de separação das duas regiões.

²²O PVI para a equação de Burgers (ou para outra lei de conservação hiperbólica) com condição inicial $u(x, 0) = u_e$, se $x < 0$ e $u(x, 0) = u_d$ de $x \geq 0$ é conhecido como problema de Riemann. A relação de entropia para este problema se traduz na relação: $u_e > u_d$. (Veja [13]).

5.6 Comentários

Teorias físicas consistem em geral de uma tantas variáveis independentes (descrevendo o domínio, tipicamente o espaço-tempo), variáveis dependentes (que são as funções da teoria, como por exemplo a densidade de massa, de carga elétrica, o campo de velocidades, ou o campo eletromagnético), e equações (em geral integro-diferenciais, expressando leis de conservação, como por exemplo, as leis de conservação da massa, da carga, a equação de Navier-Stokes, ou as Equações de Maxwell), que as variáveis dependentes devem satisfazer.²³

Pelo que foi apresentado nos capítulos anteriores e repetido no parágrafo anterior, fica claro que para a descrição de fenômenos físicos, em particular em teorias de meios contínuos, utilizam-se funções: funções escalares (ou seja, funções com valores em \mathbb{R}), funções vetoriais, funções matriciais ou tensoriais, além de, conforme forem necessárias, funções com valores em outros conjuntos. Nestas notas já vimos exemplos de funções de cada um destes tipos. Assim, ρ , a densidade de massa é uma função escalar, o campo de velocidades \mathbf{v} , é uma função vetorial e digamos, \mathcal{D} , a parte simétrica de $\nabla\mathbf{v}$, que desempenha um papel na dinâmica da vorticidade (veja Capítulo 2), é uma função tensorial.

Por outro lado, neste capítulo incorporamos à nossa linguagem a noção de Funções Generalizadas (ou Distribuições) que podem igualmente ser escalares, vetoriais ou matriciais, dentre outros tipos. O espaço das distribuições é bastante amplo e permite retratar situações mais complexas do que aquelas permitidas por funções.

Ampliar o modelo ou teoria física de tal forma a que distribuições possam se candidatar a representantes de situações físicas, implica, em particular, em reinterpretar a noção de solução das equações da teoria. É bastante difundido o uso de distribuições em teorias físicas que envolvam equações diferenciais lineares. Nos capítulos que se seguem discutiremos um pouco mais o papel das *funções generalizadas* em modelos físicos não-lineares. A aceitação de uma nova formulação de uma teoria física requer, contudo, que decidamos se as novas soluções têm *conteúdo físico* ou se são meros subprodutos da matemática. Esta decisão é uma tarefa difícil que envolve desde comparações com experimentos, passando por simulações numéricas, e indo até à determinação do apuro dos teoremas matemáticos resultantes, conforme a prática científica atual. É claro, no entanto, que distribuições

²³Feynman em [19] apresenta uma excelente discussão não técnica de algumas idéias fundamentais da Física.

fazem parte do arsenal de Físicos (lembre-se da “função” δ de Dirac!) e de Matemáticos (lembre-se da distribuição δ de Dirac!). Geralmente, Físicos não explicitam se utilizam funções ou funções generalizadas. Além disso, denominam algumas dessas funções de *campos* escalares, vetoriais, tensoriais, e assim por diante.

Capítulo 6

Forma Fraca de Euler e Navier-Stokes

O objetivo deste capítulo é obter uma formulação fraca para as equações de Euler e de Navier-Stokes. É conveniente comparar o desenvolvimento análogo, mais simples, do Capítulo 4 com o deste. Há no entanto diferença crucial: naquele estudava-se um PVI, ao passo que neste, apenas solubilidade local será considerada. Isto é uma simplificação pois o problema físico completo é global, carecendo de condição inicial e até mesmo de condição de fronteira. Contudo o estudo das peculiaridades locais é um passo decisivo na direção de estudar o problema completo. Sem haver sido levantada a questão, esta simplificação (de esquecer os aspectos globais, e se concentrar nos aspectos locais), já havia sido efetuada na penúltima seção do capítulo anterior. Há outra diferença que queremos salientar. Caracterizar o que é fenomenologicamente correto foi fácil para a equação de onda mais simples; já para a equação de Navier-Stokes, tal não é possível devido à multiplicidade e complexidade de fenômenos regidos por esta.

Seja Ω aberto em \mathbb{R}^3 e $t_0 \in (0, +\infty]$. Começamos por recordar¹ que as equações de movimento para um fluido incompressível viscoso em *Forma de Divergência* são:

$$\begin{cases} (\rho \mathbf{v})_t + \text{Div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times (0, t_0) . \quad (6.1)$$

Fazendo o produto escalar dos dois membros da equação (6.1) por uma função teste $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$, e integrando por partes obtêm-se a

¹Veja equação (1.23) no Exercício 7.

identidade:

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \{ \phi_t \cdot \rho \mathbf{v} + \nabla \phi : \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mu \Delta \phi \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \phi p \} d\mathbf{x} dt = 0, \quad (6.2)$$

para toda a função teste $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$. Os detalhes ficam para o exercício a seguir.

Exercício 59 a) Mostre que valem as *regras de Leibnitz* :

$$\text{i) } \frac{\partial}{\partial t} (\phi \cdot \mathbf{u}) = \phi_t \cdot \mathbf{u} + \phi \cdot \mathbf{u}_t$$

$$\text{ii) } \operatorname{div} (f \mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$\text{iii) } \operatorname{div} (f \nabla \phi) - \operatorname{div} (\phi \nabla f) = f \Delta \phi - \phi \Delta f$$

$$\text{iv) } \operatorname{div} (A \phi) = \operatorname{Div} A^t \cdot \phi + A : (\nabla \phi)^t \text{ onde } A \text{ é uma função matricial.}$$

b) Use o Teorema da Divergência para mostrar que:

$$\text{i) } \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v} \cdot \phi) d\mathbf{x} dt = 0$$

$$\text{ii) } \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \phi) d\mathbf{x} dt = 0$$

$$\text{iii) } \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \operatorname{div} (p \phi) d\mathbf{x} dt = 0$$

$$\text{iv) } \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\nabla \phi \mathbf{v}) - \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v} \phi) d\mathbf{x} dt = 0$$

se $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$.

c) Mostre que, se \mathbf{v} é solução clássica de (6.1), então a equação (6.2) é satisfeita para toda a função $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$.

De forma análoga, a condição de incompressibilidade implica que

$$\int \nabla \psi \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty \quad (6.3)$$

Usando o Lema 34, é fácil resolver o exercício a seguir.

Exercício 60 Sejam \mathbf{v} em $\mathcal{C}^2(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$ e p em $\mathcal{C}^1(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R})$. Mostre que o par (\mathbf{v}, p) satisfaz (6.1) se e só se satisfaz (6.2) e (6.3).²

A formulação fraca da equação de Navier-Stokes excluirá a pressão. O próximo exercício, que mostra uma propriedade de ortogonalidade para campos de vetores, é um passo nesta direção.

²Compare com a Proposição 33.

Exercício 61 Sejam f em $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e ϕ em $C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, com $\operatorname{div} \phi = 0$. Defina o campo gradiente $\mathbf{u} = \nabla f$. Mostre que o campo gradiente \mathbf{u} e o campo incompressível ϕ (que, deixe-nos enfatizar, se anula na fronteira de Ω) são ortogonais, isto é,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \phi \, d\mathbf{x} = 0$$

O exercício anterior é apenas a condição necessária de um caso particular do seguinte resultado.

Proposição 62 Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^m e $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Para que exista $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ resolvendo o sistema de EDP's de 1ª ordem,

$$\nabla f = \mathbf{u} \quad , \quad (6.4)$$

é necessário e suficiente que seja satisfeita a condição

$$\langle \mathbf{u}, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty, \quad \text{com } \operatorname{div} \phi = 0. \quad (6.5)$$

A solução é única a menos de uma constante aditiva, isto é, se g é outra solução de (6.4), então existirá uma constante c em \mathbb{R} , tal que $g = f + c$. Ademais, valem os seguintes resultados de regularidade: (a) Se \mathbf{u} está em $\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, então f pertence a $\mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)$. (b) Se \mathbf{u} está em $C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$, então f pertence a $C^1(\Omega)$.³

Exercício 63 Mostre que (6.5) é condição necessária para (6.4)

Definição 64 Uma função $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$, é solução fraca (de Leray-Hopf) da equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível (6.1) se:

a) E' satisfeita a lei fraca de conservação do momento:

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \{ \phi_t \cdot \rho \mathbf{v} + \nabla \phi : \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mu \Delta \phi \cdot \mathbf{v} \} \, d\mathbf{x} dt = 0$$

para toda a função teste $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$ com $\operatorname{div} \phi = 0$.

b) E' satisfeita a condição de incompressibilidade:

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} dt = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}).$$

³Para a suficiência consulte [60] Proposição 1.1, página 14, e para a unicidade e o primeiro resultado de regularidade consulte Proposição 1.2, da citada referência. O segundo resultado de regularidade segue-se do primeiro e da demonstração da Proposição 2.2.1, página 22 de [27].

A definição de solução fraca da equação de Euler é obtida da definição acima colocando-se $\mu = 0$. Em particular \mathbf{v} , solução fraca da equação de Euler, satisfaz a *lei fraca de conservação do momento*,

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} \{ \phi_t \cdot \mathbf{v} + \nabla \phi : \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \} dx dt = 0, \quad (6.6)$$

para toda a função teste $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ com $\operatorname{div} \phi = 0$.

Faremos alguns comentários acerca destas definições. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é fácil verificar que

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}} &\in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3), \quad \text{e} \\ i_{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} &\in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

onde $i_{\mathbf{v}}$ como definido no Capítulo 5 e $i_{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}$ sendo a distribuição dada pela fórmula:

$$\langle i_{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}, \Phi \rangle = \sum_{j,l=1}^3 \langle v_j v_l, \Phi_{jl} \rangle \quad .$$

Por simplicidade de notação denotaremos $i_{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}$ por $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ apenas, analogamente ao que fazemos com \mathbf{v} .

Além disso, dizer que \mathbf{v} satisfaz item a da definição, equivale a afirmar que a distribuição

$$J = (\rho \mathbf{v})_t + \operatorname{Div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mu \Delta \mathbf{v},$$

satisfaz

$$\langle J, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty, \quad \text{com } \operatorname{div} \phi = 0.$$

Então, pela Proposição 62, existirá $p \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $J = -\nabla p$. Se \mathbf{v} é de classe \mathcal{C}^2 , então é fácil ver que $J \in \mathcal{C}^0$, pois as derivadas até 2ª ordem de v_i e de $v_i v_j$, $1 \leq i, j \leq 3$ no sentido das distribuições, coincidem com as derivadas clássicas.⁴ Assim, pela Proposição 62, existirá $p \in \mathcal{C}^1$ tal que $J = -\nabla p$ classicamente. Nestas circunstâncias, mesmo admitindo-se a existência de alguma outra distribuição p tal que $-\nabla p = J$, porque J pertence a \mathcal{L}_{loc}^2 , a solução da equação $-\nabla p = J$ é única a menos de uma constante aditiva, (veja Proposição 62). A mesma linha de raciocínio pode ser empregue para as soluções fracas da equação de Euler que satisfaçam uma condição de regularidade apropriada; neste caso se \mathbf{v} for de classe \mathcal{C}^1 , obtemos resultados análogos. Resumiremos o resultado desta discussão, especializando para a equação de Euler, na Proposição a seguir.

⁴Veja parágrafo seguinte à Definição 47.

Proposição 65 *Seja Ω um subconjunto aberto em \mathbb{R}^3 . Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$ uma solução fraca (Leray-Hopf) da equação de Euler para um fluido incompressível. Então existirá uma função $p \in \mathcal{C}^1(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R})$, a pressão, única a menos de uma constante aditiva, tal que o par (\mathbf{v}, p) é solução clássica da equação de Euler.*⁵

Exercício 66 Seja Ω um aberto limitado. a) Assuma que $\{u_n\}$ é uma sequência em $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ convergindo uniformemente para $u_\infty \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Seja ainda $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Mostre que

$$\left. \begin{array}{l} u_n \psi \xrightarrow{\text{unif}} u_\infty \psi \\ u_n^2 \xrightarrow{\text{unif}} u_\infty^2 \end{array} \right\}, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

(Dica) Para a convergência do quadrado use que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, e $|a + b| \leq |a| + |b|$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

b) (*Estabilidade-I*) Seja $\{u_n\}$ em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ uma sequência de soluções clássicas do PVI da equação de onda (4.1, 4.2), convergindo uniformemente a $u_\infty \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R})$. Mostre que u_∞ é solução fraca deste PVI com condição inicial igual a $u_\infty(x, 0)$. Dê um exemplo em que o limite u_∞ é contínuo mas não é diferenciável.

c) (*Estabilidade-II*) Considere uma sequência $\{(\mathbf{v}_n, p_n)\}$ de soluções clássicas de classe \mathcal{C}^1 da equação de Euler, convergindo uniformemente a $(\mathbf{v}_\infty, p_\infty)$, (que podem ser apenas contínuas). Mostre que este limite é uma solução fraca da equação de Euler.

Exercício 67 Sejam Ω , um aberto simplesmente conexo, e \mathbf{u} , uma distribuição vetorial em $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Mostre que o sistema de equações diferenciais parciais de 1^a ordem

$$\nabla f = \mathbf{u}$$

tem solução no sentido das distribuições, se e somente se

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0 \text{ em } \mathcal{D}' \quad .$$

(Dica: Use Proposição 62 e o Exercício 50 alíneas b e f).

⁵Compare com Proposição 33.

Capítulo 7

Convergência em \mathcal{D}'

A noção de convergência fraca em \mathcal{D}' e diversos exemplos ilustrando comportamentos físicos básicos, são apresentados neste capítulo. São também ilustrados aspectos da falta de continuidade de funcionais não lineares com respeito à convergência fraca.¹ Usaremos estes conceitos, nos Capítulos 8 e 9, no estudo de sequências de soluções das equações de movimento de um fluido incompressível, e na definição de solução de DiPerna-Majda.

Sejam $\{T^n\}$ uma sequência de elementos em $\mathcal{D}'(\Omega)$, e $T^\infty \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 68 *A sequência T^n converge fracamente a T^∞ quando $n \rightarrow \infty$, e denota-se tal fato por*

$$T^n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T^\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se

$$\langle T^n, \phi \rangle \rightarrow \langle T^\infty, \phi \rangle \text{ quando } n \rightarrow \infty \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty.$$

A segunda seta acima indica convergência de números reais; $\langle T^n, \phi \rangle \in \mathbb{R}$. Note que convergência em \mathcal{D}' é uma noção de convergência pontual das funções T^n , onde cada elemento $\phi \in \mathcal{D}$ é pensado como um ponto.

A noção de convergência fraca acima é claramente extensível a $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e a $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k)$; sequências nestes espaços convergirão fracamente se convergirem fracamente, coordenada a coordenada, em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Para os exemplos considerados abaixo os elementos de cada sequência serão distribuições naturalmente associadas a funções em \mathcal{L}_{loc}^1 . Não obstante a distribuição limite nem sempre será representada por uma função.

¹Esta afirmação tem que ser qualificada, pois em geral, não é possível falar-se do produto de distribuições.

Este será o caso das sequências que convergem para a distribuição δ de Dirac. Para manter alguma intuição será conveniente pensar cada elemento da sequência de funções representando alguma quantidade física definida em Ω , tipo densidade de massa, densidade de energia cinética, campo elétrico ou algum outro campo. O processo limite, o que acontece quando $n \rightarrow \infty$, pode ser imaginado como sendo a evolução dessa quantidade física (com n sendo pensado como tempo); veja Figuras 7.1, 7.2 e, 7.4.

Por vezes o parâmetro da sequência não varia em \mathbb{N} , mas sim em $(0, \epsilon_0]$, em $[0, +\infty)$, ou algum outro conjunto com um “fim” escolhido, ($+\infty$ em \mathbb{N} e em $[0, +\infty)$, e 0 em $(0, \epsilon_0]$). Ilustramos, considerando que o parâmetro está em $(0, \epsilon_0]$, como adaptar a Definição 68 de convergência fraca a estas situações. Dizemos que $\{\psi^\epsilon\}$ converge a ψ^0 , quando $\epsilon \rightarrow 0$, se

$$\langle \psi^\epsilon, \phi \rangle \rightarrow \langle \psi^0, \phi \rangle, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty. \quad (7.1)$$

Aqui pensamos ϵ como sendo o tempo que falta para terminar um processo físico qualquer e, $\epsilon = 0$, o instante (talvez crítico) em que ele termina. Alternativamente, ϵ poderia ser algum parâmetro físico, por exemplo a viscosidade, e quando estudamos a convergência de $\{\psi^\epsilon\}$ estamos investigando o efeito da viscosidade ir a zero.

Iremos estudar exemplos de três processos básicos, representando (a) translação, (b) oscilação e (c) concentração, ilustrados por:

$$\text{a) } \psi^t(x) = \psi(x - t), \quad t \in [0, \infty) \quad (7.2)$$

$$\text{b) } p^\epsilon(x) = p\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon \in (0, 1], \quad (7.3)$$

$$\text{c) } \rho^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon \in (0, 1], \quad (7.4)$$

onde, $\psi \in C_0^0(\mathbb{R})$, é uma função contínua de suporte compacto e p e ρ são funções contínuas definidas em \mathbb{R} , sendo p periódica de período l , $p(x+l) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e ρ uma função não negativa com $\int \rho dx = 1$. Estas são sequências de funções contínuas. Cada um destes exemplos são obtidos através da aplicação de transformações geométricas simples (translações e homotetias) a funções fixas. Procuraremos caricaturar verbalmente estas sequências. Assim (a) (veja Figura 7.1) corresponderia a uma quantidade física que escapa de qualquer região limitada num tempo finito: é obtida pela translação de uma função com suporte compacto. Em (b) (veja Figura 7.2), pelo reescalamento de uma função periódica, detectamos que mais e mais oscilações do campo ² preenchem o espaço quando ϵ vai a zero. Há uma persistência, e de fato, uma intensificação das oscilações no limite. O processo

²Utilizaremos a expressão *campo* no lugar de função ou distribuição mesmo quando

no item c se desenvolve através de uma concentração do campo em torno da origem; numa pequena região do espaço o campo vai ficando “intenso”, ao passo que numa grande extensão do espaço o campo vai “enfraquecendo” (Figura 7.4). Este processo produz uma separação do domínio de definição do campo em duas regiões vagamente complementares, (não precisamente delimitadas, cuja união é o espaço todo, mas com uma “pequena” interseção, como ficará claro quando as “definirmos”, na próxima sentença). A primeira região, a *região de campo forte*, corresponde à pequena porção do espaço onde o campo é intenso. A segunda, a *região de campo fraco*, é a região onde o campo é pouco intenso, ocupando a maior parte do espaço. Neste cenário, dizemos que há uma dicotomia campo forte \times campo fraco, que se desenvolve através de uma concentração do campo em torno da origem. Este processo corresponde à genesis da δ de Dirac.

Pense como generalizar estes processos para \mathbb{R}^m , e também como combiná-los para obter processos mais complexos.³

7.1 O Processo de Translação

Para ψ^t dado em (7.2) tem-se que

$$\psi^t \xrightarrow{D'} 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (7.5)$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^t(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty$$

A demonstração de (7.5) é bem simples e pode ser entendida facilmente se examinarmos a Figura 7.1b. Fixada ϕ , depois de um certo tempo t_s , ψ^t já “terá deixado para trás” o suporte da função teste ϕ . Assim sendo, para $t > t_s$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^t \phi dx = 0,$$

donde (7.5) se segue. Detalhes são deixados a cargo do leitor.

usualmente um Físico não considerá-la um *campo físico*. Fazemos isto para simplificar a linguagem porque, os fenômenos que tratamos, que têm fortes aspectos geométricos, ocorrem também para a energia cinética e para a densidade de massa que não são considerados campos.

³Tome, por exemplo, $\psi^t(x) = \psi_1(x - t) + \psi_2(x - 2t)$. Processos de oscilação podem, por exemplo, ocorrer em uma porção limitada do espaço. O desenvolvimento de uma concentração pode se dar em torno de outros subconjuntos que não apenas um ponto.

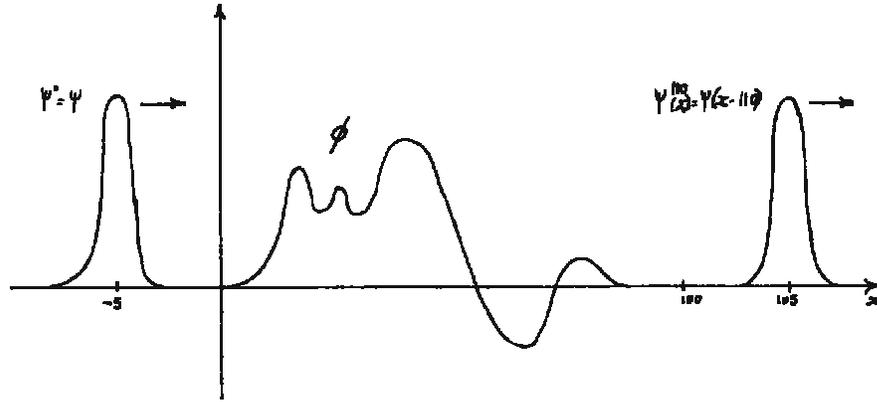


Figura 7.1: Processo de translação: A função ψ_t , para cada t fixo, pode ser pensada como a densidade de massa de um objeto (unidimensional) no instante t . Se o objeto translada para a direita com velocidade igual a 1, e se ψ representa a densidade no instante $t = 0$, então $\psi^t(x) = \psi(x - t)$. No instante $t = 110$ o objeto já “deixou para trás” a função teste ϕ .

7.2 O Processo de Oscilação

Seja p uma função contínua e periódica, com período l . A média de p no período é o número real

$$\tilde{p} = \frac{1}{l} \int_0^l p(x) dx.$$

Para p^ϵ , o reescalamento da função periódica p , definido em (7.3) (veja Figura 7.2), temos que:

$$p^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \tilde{p}, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

ou seja

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} p^\epsilon(x) \phi(x) dx = \tilde{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty. \quad (7.6)$$

Em particular quando $p(x) = \text{sen}(x)$, selecionando os valores de ϵ da forma $1/n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos em (7.6) nada mais do que o Lema de Riemann-Lebesgue clássico⁴, qual seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}(nx) \phi(x) dx = 0,$$

⁴Teorema 1.1, página 303 de [29]

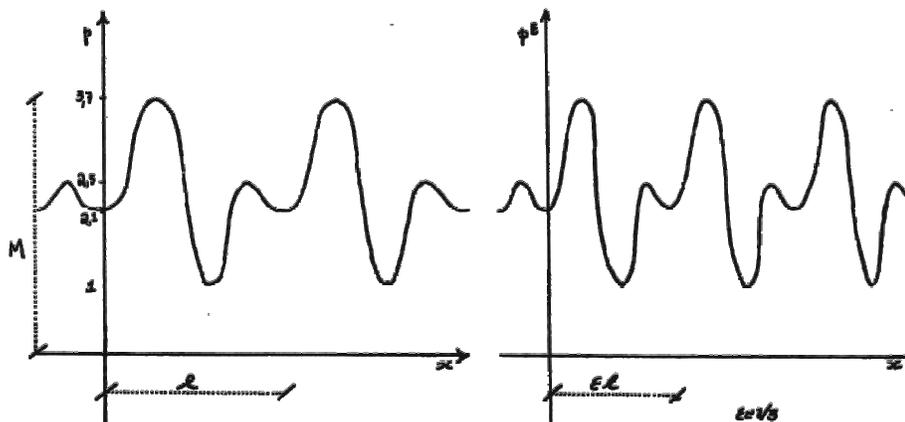


Figura 7.2: Processo de oscilação a) Função periódica p : Aqui l é o período (ou comprimento de onda) e, M é a norma do sup (ou amplitude); o período l define uma “escala natural” para a função p . b) Reescalamento de função periódica: a amplitude não é alterada mas a “escala natural” de p^ϵ é ϵl . No limite $\epsilon \rightarrow 0$ aumenta-se o número de “oscilações” por unidade de comprimento. Um processo de oscilação ocorre quando, numa região de volume finito (e fixo) do espaço, mais e mais “oscilações” do campo estão presentes.

uma vez que a média do seno no período é zero.

Seja $p = p(\mathbf{x}, z) \in C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$, onde p é uma função periódica com respeito à *segunda* coordenada z , com período l , isto é, $p(\mathbf{x}, z + l) = p(\mathbf{x}, z)$ para todo \mathbf{x}, z . Denote por $\tilde{p} = \tilde{p}(\mathbf{x}) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ a função *média* dada pela fórmula

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{l} \int_0^l p(\mathbf{x}, z) dz.$$

Mais geral que (7.6), o seguinte resultado é válido:

Teorema 69 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Considere a sequência de funções*

$$p^\epsilon(\mathbf{x}) = p\left(\mathbf{x}, \frac{x_1}{\epsilon}\right)$$

então,

$$p^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \tilde{p}, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

ou, mais concretamente,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} p^\epsilon(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{p}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$$

Esboço da demonstração de (7.6): Recordamos a definição de função característica do intervalo $[a, b]$:

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Começaremos por mostrar que (7.6) é válida se no lugar de ϕ colocarmos $\chi_{[a,b]}$, isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} p^\epsilon(x) \chi_{[a,b]}(x) dx &= \tilde{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x) dx \\ &= \tilde{p} (b - a), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Evidentemente $\chi_{[a,b]}$ não está em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, de qualquer forma este será um primeiro passo em direção ao resultado (7.6).

Dado ϵ , o período de p^ϵ é ϵl . Seja $n = n(\epsilon)$ o número de períodos de p^ϵ contidos no intervalo $[a, b]$, isto é, o inteiro para o qual,

$$n\epsilon l \leq b - a < (n + 1)\epsilon l. \quad (7.8)$$

Por periodicidade, e através de uma mudança de variável tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p^\epsilon(x) \chi_{[a,b]}(x) dx &= \int_a^b p^\epsilon(x) dx \\ &= \int_a^{a+n\epsilon l} p^\epsilon(x) dx + \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \\ &= n \int_a^{a+\epsilon l} p^\epsilon(x) dx + \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \\ &= n \int_0^{\epsilon l} p^\epsilon(x) dx + \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \\ &= n\epsilon \int_0^l p(x) dx + \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \\ &= n\epsilon l \tilde{p} + \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \end{aligned} \quad (7.9)$$

Seja M um majorante para p , isto é, M tal que $|p(x)| \leq M, \forall x$. Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx \right| &\leq \int_{a+n\epsilon l}^b |p^\epsilon(x)| dx \\ &\leq \int_{b-\epsilon l}^b M dx = M\epsilon l \end{aligned} \quad (7.10)$$

o que imediatamente resulta:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+n\epsilon l}^b p^\epsilon(x) dx = 0.$$

Além disso por (7.8) é claro que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [(b-a) - n(\epsilon)\epsilon l] = 0,$$

o que juntamente com (7.9) e (7.10) implica (7.7).

Tome agora uma *função escada*, uma combinação linear finita de funções características (Figura 7.3),

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(x),$$

onde cada I_k é um intervalo fechado. Por (7.7),

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} p^\epsilon(x) g(x) dx &= \tilde{p} \sum_{k=1}^n a_k m(I_k) \\ &= \tilde{p} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aqui, $m(I_k)$ denota o comprimento do intervalo I_k .

O resultado geral (7.6) segue-se de (7.11) porque toda função contínua com suporte compacto pode ser uniformemente aproximada por uma função escada [52]. ■

7.3 O Processo de Concentração

Sequências de Dirac, “massa” total finita

Demonstraremos nesta subsecção que (com a notação usada em (7.4), veja também Figura 7.4),

$$\rho^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

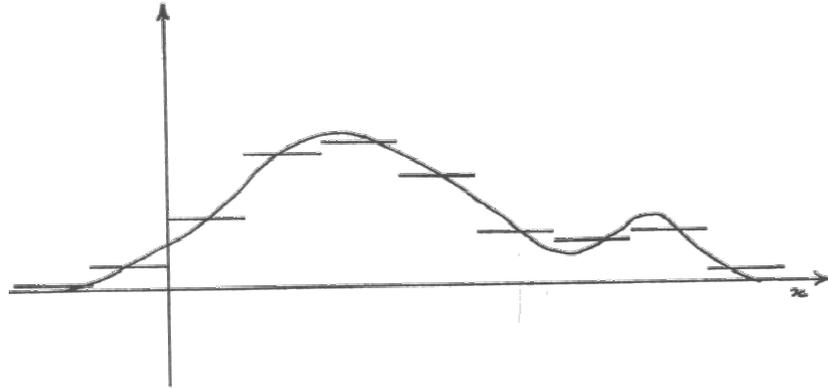


Figura 7.3: Aproximação de função contínua por função escada

isto é,

$$\langle \rho^\epsilon, \phi \rangle \rightarrow \phi(\mathbf{0}), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Definição 70 Uma sequência de funções $\{\rho^\epsilon\} \subset C^0(\mathbb{R}^m)$ é chamada de sequência de Dirac se as condições abaixo forem satisfeitas:

- a) *Positividade:* $\rho^\epsilon(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x}, \forall \epsilon.$
- b) *Massa total um:* $\int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
- c) *Concentração da massa em torno da origem:* $\forall \lambda > 0, \forall \gamma > 0, \exists \epsilon_1 > 0$ tal que $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \epsilon_1,$

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lambda.$$

Intuitivamente o significado desta definição é o seguinte: pensa-se em ϵ como o tempo que falta até o instante crítico 0; a quantidade de massa fora de uma pequena vizinhança escolhida é tão pequena quanto se deseje desde que o tempo que falte até o instante crítico seja suficientemente pequeno. Resumindo, a massa se concentra em torno da origem. Sempre que a quantidade de “massa” é finita e se localiza em uma região cada vez menor, dizemos que ocorre um processo de *concentração de “massa”*.

Exemplo 71 Consideremos uma função $\rho \in C^0(\mathbb{R}^m)$, com $\rho \geq 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^m} \rho d\mathbf{x} = 1.$$

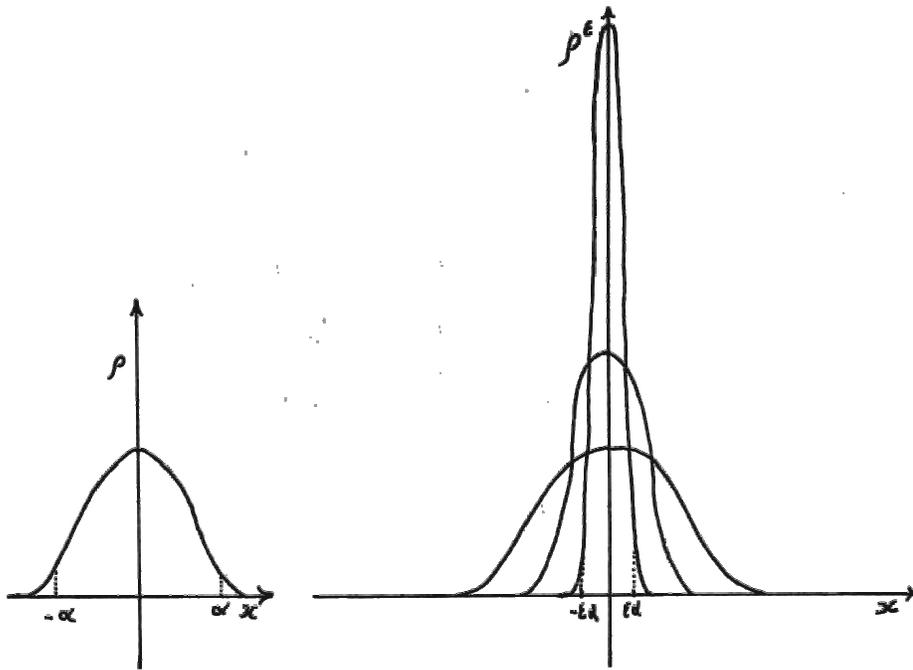


Figura 7.4: Processo de concentração a) A função ρ é não negativa e tem integral igual a 1. Sua “escala natural”, digamos, é o número $\alpha > 0$ tal que $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho(x) dx = 0,99$. b) A função $\rho^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ também é não negativa e tem integral 1. Sua “escala natural” é $\epsilon\alpha$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, a “massa” se concentra em uma vizinhança da origem.

Então

$$\rho^\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^m} \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)$$

é uma sequência de Dirac⁵.

Demonstração Verificaremos as três condições; a) é trivial.

b) Através da troca de variáveis $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$, verificamos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\epsilon^m} \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1. \end{aligned}$$

c) Quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $\gamma > 0$, fazendo uma troca de variáveis, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \frac{1}{\epsilon^m} \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma/\epsilon)} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Como a integral de ρ é um, dado $\lambda > 0$, existe R_0 tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(R_0)} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} < \epsilon_0.$$

Vemos então que, dados λ e γ arbitrários, escolhendo-se ϵ_1 tal que $\gamma/\epsilon_1 = R_0$, a condição c fica assegurada. ■

Teorema 72 Sequências de Dirac convergem em \mathcal{D}' , para a distribuição δ de Dirac. Melhor dizendo, quando $\{\rho^\epsilon\}$ é uma sequência de Dirac,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (7.12)$$

Demonstração Exploraremos a condição c. Numa pequena porção do espaço em torno de zero a massa é quase 1 e numa grande extensão do espaço a massa é quase zero. Usando-se (b) obtemos a equação

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(\mathbf{0}) \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0})$$

⁵O reescalamto da variável independente provoca uma concentração geométrica; o da variável dependente é posteriormente escolhido de tal forma que a “massa” total, $\int \rho^\epsilon$, seja 1.

seguinte-se que é suficiente mostrar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})] d\mathbf{x} = 0.$$

Iremos mostrar que ambos os termos do lado direito da desigualdade abaixo são arbitrariamente pequenos para ϵ suficientemente pequeno e $\gamma > 0$ a ser escolhido depois.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})] d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})] d\mathbf{x} \right| + \\ &+ \left| \int_{B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})] d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

O primeiro termo é pequeno porque “há pouca massa” fora da origem, e o segundo termo é pequeno porque sendo ϕ contínua e γ pequeno, $\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})$ será pequeno para $|\mathbf{x}| < \gamma$. Mais detalhes seguem. Seja M um majorante de ϕ . Pela continuidade de ϕ , dado $\lambda > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})| < \lambda/2$, para todo \mathbf{x} , tal que $|\mathbf{x}| < \gamma$. Como $\{\rho^\epsilon\}$ é uma sequência de Dirac, usando a condição c para $\lambda/4M$ e o γ escolhido acima, concluímos que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \leq \epsilon_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{\lambda}{4M}.$$

Além disso, $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})| \leq 2M$, para todo \mathbf{x} . Então para o $\lambda > 0$ arbitrário dado acima e para o γ e o ϵ_1 escolhidos acima, e para $\epsilon \leq \epsilon_1$ vale:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0})] d\mathbf{x} \right| &\leq \\ &\leq 2M \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \int_{B_0(\gamma)} \rho^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração de (7.12). ■

Outro Processo de Concentração, “massa” infinita

Teorema 73 *Seja $W \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ tal que:*

a) $|W(r)| \leq Kr^2$, para algum $K > 0$ e para todo $|r| \leq 1$.

$$b) \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = 1/2\pi \neq 0$$

$$c) \int_0^{+\infty} |\ln s W'(s)| ds = \gamma < \infty. \quad ^6$$

Defina⁷

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} W(|\mathbf{x}|) \quad e, \quad (7.13)$$

$$\psi^\epsilon(\mathbf{x}) = \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1} \epsilon^{-2} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \quad . \quad (7.14)$$

Então

$$\psi^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (7.15)$$

Observação: Pela condição b imposta a W e por (7.13), concluímos que ψ decai a zero lentamente quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^2} \psi d\mathbf{x} = +\infty$. Por esta razão o reescalamto usual, $\epsilon^{-2}\psi(\mathbf{x}/\epsilon)$, apresentado na subseção anterior, não funciona (no sentido que a sequência resultante não converge em \mathcal{D}'), tendo que ser substituído pelo apresentado em (7.14). Estes dois reescalamentos são análogos geometricamente porquanto ambos envolvem homotetias parecidas, tanto nos domínios (as mesmas inclusive) quanto nos contradomínios de funções fixas. Repetindo, por ênfase, note que o processo de concentração apresentado no Teorema 73, não é um processo de concentração do tipo caracterizado pela noção de sequência de Dirac (da subseção anterior), já que a “massa” total neste exemplo é infinita. No entanto, semelhante ao que ocorre com sequências de Dirac, o cenário correspondente a esta sequência, é o de uma dicotomia campo forte \times campo fraco.

Demonstração (do Teorema) Dada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, definimos

$$\bar{\phi}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta. \quad (7.16)$$

Usando (7.13), mudança de coordenadas cartesianas para polares em \mathbb{R}^2 e integração por partes obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{x}) \psi^\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{x}) \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1} \frac{1}{r^2} W\left(\frac{r}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty 2\pi \bar{\phi}(r) \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1} \frac{1}{r} W\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr \end{aligned} \quad (7.17)$$

⁶Uma função $W \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ com $W'(r)r^{1+\alpha}$ limitada em $[1, +\infty)$ satisfaz condição c.

⁷Condição a é equivalente a ψ ser limitada numa vizinhança de $r = 0$.

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon + B_\epsilon + C_\epsilon \quad , \text{ onde,} \quad (7.18)$$

$$A_\epsilon = 2\pi \bar{\phi}(r) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln r W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \Big|_0^\infty \quad , \quad (7.19)$$

$$B_\epsilon = - \int_0^\infty 2\pi \bar{\phi}'(r) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln r W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) dr \quad , \text{ e,}$$

$$C_\epsilon = - \int_0^\infty 2\pi \bar{\phi}(r) \frac{1}{\epsilon} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln r W' \left(\frac{r}{\epsilon} \right) dr \quad . \quad (7.20)$$

Passamos imediatamente ao cálculo dos limites, quando $\epsilon \rightarrow 0$, de A_ϵ , B_ϵ e C_ϵ . Mostramos primeiramente que A_ϵ , que é dado pela diferença de dois termos (obtidos “avaliando” uma função em $+\infty$ e em 0, veja (7.19)), é nulo. A função $\bar{\phi}$, que tem suporte compacto, se anula para r suficientemente grande e então, o termo de A_ϵ correspondente à avaliação em $+\infty$, é igual a zero. Igualmente, aquele termo da avaliação em $r = 0$ é nulo, como veremos em seguida. Porque ϕ é contínua, segue-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\phi}(r) = \phi(0) \quad . \quad (7.21)$$

A condição a, para ϵ fixo, implica

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \ln r W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \right| = 0 \quad .$$

Do que ficou dito resulta que

$$A_\epsilon = 0 \text{ e } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon = 0. \quad (7.22)$$

Em seguida mostramos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_\epsilon = 0. \quad (7.23)$$

Dado que W é contínua e tem limite finito no infinito, conclui-se que é limitada em $[0, \infty)$. Seja α um majorante de W . Seja ainda R , o raio de um disco que contem o suporte de $\bar{\phi}'$, e seja L , um majorante de $\bar{\phi}'$. Segue-se que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty 2\pi \bar{\phi}'(r) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln r W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) dr \right| \leq \\ & \leq 2\pi \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \int_0^R \left| \bar{\phi}'(r) \ln r W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \right| dr \\ & \leq 2\pi \alpha L \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \int_0^R |\ln r| dr. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\epsilon} (\ln(1/\epsilon))^{-1} = 0$, passando ao limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, na expressão acima, concluímos (7.23).

Finalmente consideramos o termo C_{ϵ} , para o qual vale o limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{\epsilon} = \phi(\mathbf{0}). \quad (7.24)$$

Fazendo a mudança de variável $l = r/\epsilon$ na integral em C_{ϵ} , e usando $\ln(\epsilon l) = \ln \epsilon + \ln l$, obtemos que C_{ϵ} é igual à soma de dois termos. O limite do primeiro deles é:

$$\begin{aligned} & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} 2\pi \bar{\phi}(\epsilon l) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln \epsilon W'(l) dl = \\ & = \int_0^{\infty} 2\pi \bar{\phi}(\mathbf{0}) W'(l) dl \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} & = 2\pi \bar{\phi}(\mathbf{0}) \lim_{l \rightarrow \infty} (W(l) - W(0)) \\ & = \phi(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Seja M um majorante de $\bar{\phi}$. Usando condição c, concluímos que o limite do segundo termo é zero, uma vez que:

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^{\infty} 2\pi \bar{\phi}(\epsilon l) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln l W'(l) dl \right| \leq \\ & \leq \int_0^{\infty} \left| 2\pi \bar{\phi}(\epsilon l) \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \ln l W'(l) \right| dl \\ & \leq 2\pi M \gamma \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

De (7.26) e de (7.27) segue-se (7.24).

Arrematando, de (7.18), (7.22), (7.23), e (7.24), concluímos (7.15), isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \psi^{\epsilon}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}) \quad ,$$

para toda a função $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. ■

7.4 Questões de Continuidade

Consideraremos dois exemplos de sequências de campos vetoriais em \mathbb{R} nos quais há uma perda de energia cinética no processo de limite. Estes exemplos não são exemplos de soluções da equação de Navier-Stokes (nem tão pouco

da de Euler), são dados aqui como uma “caricatura” do tipo de fenômenos que ocorrem com sequências de soluções das equações de Euler. No próximo capítulo veremos exemplos de sequências de soluções das equações de Euler que exibem comportamento semelhante.

Denotamos por

$$E(\Omega, u) = \int_{\Omega} \rho \frac{u^2}{2} dx,$$

a energia cinética associada ao campo de vetores u na região espacial Ω ; onde $\rho u^2(x)/2$ é a densidade de energia cinética. (Veja nota de rodapé à página 7).

Veremos nos exemplos seguintes, peculiaridades do comportamento da energia cinética ao longo de uma sequência, fracamente convergente em \mathcal{D}' , para cujos elementos é possível fazer sentido o que seja a energia cinética.

Exemplo 74 Seja $u^\epsilon(x) = \sin(x/\epsilon)$. Então pelo Teorema (Riemann-Lebesgue) 69,

$$u^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

No entanto,

$$E([- \pi, \pi], u^\epsilon) = \frac{\rho}{2} \int_{- \pi}^{+ \pi} \sin^2 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) dx,$$

e, de novo, pelo Teorema 69,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E([- \pi, \pi], u^\epsilon) = \frac{\rho}{4}.$$

Constatamos que:

$$0 = E([- \pi, + \pi], 0) = E \left([- \pi, + \pi], \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon \right) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E([- \pi, + \pi], u^\epsilon) = \frac{\rho}{4}.$$

Uma vez que a energia cinética do limite (lado esquerdo da equação acima), é menor do que o limite da energia cinética (lado direito da equação), dizemos que há uma perda de energia cinética no limite. Isto, é claro, significa que a função não linear E é descontínua com respeito à convergência fraca. ■

Exemplo 75 (Concentração da energia cinética num ponto) Seja dada uma função u em $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, com $u(x) \geq 0$,

$$\int_{- \infty}^{+ \infty} u(x) dx < \infty, \text{ e } \int_{- \infty}^{+ \infty} u^2(x) dx = 1.$$

(Exercício: Certifique-se que é possível construir-se uma função u com estas características). Considere a sequência

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} u\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Mostraremos que

$$u^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0, \quad (7.28)$$

ao passo que

$$\frac{\rho}{2} (u^\epsilon)^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\rho}{2} \delta. \quad (7.29)$$

Demonstração Seja $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ e M um seu majorante, então

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u^\epsilon(x) \phi(x) dx \right| \leq M \int_{\mathbb{R}} u^\epsilon(x) dx = M\epsilon \int_{\mathbb{R}} u(y) dy.$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, o lado direito da desigualdade acima vai a zero e, portanto temos (7.28). A convergência em (7.29) é consequência direta de (7.12). ■

A energia cinética do campo de vetores limite é zero. Apesar disto, $E(\mathbb{R}, u^\epsilon) = \rho/2$, para todo ϵ . Dado que

$$0 = E(\mathbb{R}, 0) = E\left(\mathbb{R}, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon\right) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E(\mathbb{R}, u^\epsilon) = \frac{\rho}{2}$$

há, novamente, uma perda da energia cinética no limite. Com respeito à convergência fraca, a função não linear E é descontínua.

O leitor há de ter notado que não mencionamos o processo de translação nesta seção. Neste exemplo, não há perda da energia cinética no limite, como é fácil verificar. O leitor deve procurar entender intuitivamente porque isto acontece.

Capítulo 8

Novos Fenômenos

8.1 Considerações Preliminares

Serão apresentadas neste capítulo duas classes de sequências de soluções diferenciáveis da equação de Euler, que motivam a introdução da noção (a ser discutida no próximo capítulo) de solução generalizada de DiPerna-Majda da equação de Euler.

Sequências de soluções, numa das classes, exibem desenvolvimento de concentrações (quando o parâmetro da sequência se aproxima de zero), enquanto que na outra classe, sequências exibem persistência de oscilações. Sequências de funções exibindo estes tipos de comportamento foram considerados nos exemplos 74 e 75 do capítulo anterior. Uma característica comum aos exemplos deste e aos, acima citados, do capítulo anterior, é a perda de energia cinética no limite, isto é, a energia cinética do limite é menor do que o limite da energia cinética.

Discorremos, a seguir, sobre as características comuns às classes de sequências de soluções da equação de Euler a serem apresentadas neste capítulo, primeiramente explicitando a característica comum fundamental para, em seguida, considerar suas consequências no que diz respeito à equação de Euler.

A característica comum fundamental a estes exemplos é a limitação local uniforme (em ϵ) da energia cinética; dados $R > 0$ e $t_1 < t_2$, existe $C = C(R, t_1, t_2) < \infty$, independente de ϵ , tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_0(R)} \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} < C(R, t_1, t_2), \quad (8.1)$$

E' fácil ver, fixado ϵ , o significado físico da condição (8.1). Ela impede que, para uma solução das equações de movimento de um fluido, corresponda

uma quantidade infinita de energia cinética numa região limitada do espaço-tempo. Não impede, e ainda bem, que uma diminuta porção do espaço contenha uma quantidade finita de energia cinética; em verdade, fixado um valor finito para a energia cinética, pode-se pensá-lo contido numa região do espaço tão pequena quanto se queira. Este corresponderia aproximadamente ao cenário do escoamento da água em uma pia (intensa concentração da energia cinética num redemoinho, ocupando pouco volume, por cima do ralo).

Além do mais, condição 8.1, se satisfeita por uma sequência arbitrária de *funções* vetoriais, se constitui numa restrição forte do ponto de vista matemático. Foge aos objetivos destas notas expor, na generalidade, as propriedades matemáticas de que gozam sequências de funções que satisfazem (8.1).¹ De qualquer forma, uma sequência $\{v^\epsilon\}$ que satisfaça (8.1), terá sempre uma subseqüência convergindo fracamente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ para uma função v^0 . Veremos isto nos exemplos.

Apesar de convergirem fracamente, veremos através de um dos exemplos, que o limite, mesmo sendo diferenciável, nem sempre será solução da equação de Euler (nem mesmo no sentido de Leray-Hopf). O intrigante é que, até quando o limite é solução, como é o caso do exemplo que exhibe desenvolvimento de concentrações, pode haver perda de energia cinética no limite, o que de fato ocorre, no exemplo citado.

Sequências satisfazendo (8.1) induzem a uma nova forma de expressar a lei de conservação do momento. Discutiremos, neste capítulo, esta nova forma.

8.2 Persistência de Oscilações

A sequência de soluções considerada nesta seção exhibe variações bem acentuadas do campo de velocidades tanto espacial quanto temporalmente, (compare com Exemplo 74).²

Sequência de soluções

Seja $v = v(x_2, z)$ função diferenciável e periódica (de período 1) em z , e com *média* zero (também em z),

$$\int_0^1 v(x_2, z) dz = 0.$$

¹Veja Teorema 1 (Generalized Young Measure) em DiPerna-Majda [15].

²Persistência de oscilações em sequências de soluções ocorrem em outras equações da Física-Matemática, veja, por exemplo, [54, 48].

Pelos Exemplo 3 e Exercício 9 sabemos que a sequência de fluxos de *cisalhamento*

$$\mathbf{v}_*^\epsilon = \left(v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right), 0 \right)^t \quad (8.2)$$

é uma família de soluções estacionárias da equação de Euler em duas dimensões. Podemos construir, a partir de (8.2), soluções $\mathbf{v}^\epsilon = (v_1^\epsilon, v_2^\epsilon, v_3^\epsilon)^t$ da equação de Euler em três dimensões (veja Exercício 9). Estas serão independentes de x_3 . Definindo-se $(v_1^\epsilon, v_2^\epsilon)^t = \mathbf{v}_*^\epsilon$, v_3^ϵ deverá satisfazer uma EDP linear de 1^a ordem com coeficientes obtidos a partir de (8.2).

Escolhemos a condição inicial $v_3^\epsilon(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2, x_2/\epsilon)$ onde $w = w(x_1, x_2, z)$ é uma função diferenciável e periódica, de período 1 em z . O PVI para v_3^ϵ é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^\epsilon}{\partial t} + v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) \frac{\partial v_3^\epsilon}{\partial x_1} &= 0 \\ v_3^\epsilon(x_1, x_2, 0) &= w \left(x_1, x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Este PVI é resolvido pelo método das características (Apêndice A). As curvas características são retas:

$$\begin{aligned} x_1 = c_1(t) &= v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) t + x_1^0 \\ x_2 = c_2(t) &= x_2^0. \end{aligned}$$

Aqui, t é o parâmetro da curva, devendo-se pensar que x_1^0, x_2^0 e x_2 são constantes. As curvas características interceptam o plano $t = 0$ no ponto (x_1^0, x_2^0) . Fixado t determina-se (x_1^0, x_2^0) em função de (x_1, x_2) . A função v_3^ϵ é constante ao longo das características, donde

$$\begin{aligned} v_3^\epsilon(x_1, x_2, t) &= v_3^\epsilon(x_1^0, x_2^0, 0) \\ &= w \left(x_1^0, x_2^0, \frac{x_2^0}{\epsilon} \right) \\ &= w \left(x_1 - v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) t, x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathbf{v}^\epsilon = \begin{pmatrix} v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) \\ 0 \\ w \left(x_1 - v \left(x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) t, x_2, \frac{x_2}{\epsilon} \right) \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

é uma sequência de soluções da equação de Euler em três dimensões.

Limite de Quantidades Físicas

Observamos que a estrutura de \mathbf{v}^ϵ é a de um reescalamto de uma função periódica, $\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, x_2/\epsilon, t)$ onde, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t) = (v(x_2, z), 0, w(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z))^t \quad (8.4)$$

é uma função periódica em z (com período 1). Pelo Teorema 69 (Riemann-Lebesgue) aplicado, coordenada a coordenada, à sequência de campos de velocidade (8.3) obtemos o limite

$$\mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbf{v}^0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde \mathbf{v}^0 é a média de \mathbf{v} , dada pela fórmula que se segue:

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}, t) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t) dz \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_0^1 v(x_2, z), 0, \int_0^1 w(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) dz \right)^t \\ &= \left(0, 0, \int_0^1 w(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) dz \right)^t \end{aligned} \quad (8.6)$$

Para o campo de velocidades \mathbf{v}^ϵ , o tensor da força inercial é $-\rho \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$. Como este desempenha um papel fundamental na lei fraca de conservação do momento e depende não linearmente da velocidade, calcularemos o limite fraco de $\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$. Utilizamos o Teorema 69 coordenada a coordenada e obtemos:

$$\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$$

onde o tensor simétrico $T = T(\mathbf{x}, t)$ é:

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 v^2(x_2, z) dz & 0 & \int_0^1 w(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) v(x_2, z) dz \\ * & 0 & 0 \\ * & * & \int_0^1 w^2(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) dz \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Anotaremos o comportamento limite da densidade de energia cinética, $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}^\epsilon|^2$, claramente igual a $\frac{\rho}{2}\text{traço}(\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon)$. Usamos (8.7) para concluir que

$$\frac{\rho}{2}|\mathbf{v}^\epsilon|^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\rho}{2}e_0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde e_0 é dado pela equação

$$\begin{aligned} e_0 &= e_0(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^1 v^2(x_2, z) dz + \int_0^1 w^2(x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) dz . \end{aligned} \quad (8.8)$$

Em seguida, mostramos que existe uma perda de energia cinética no processo limite, isto é, a energia cinética do limite é menor do que o limite da energia cinética. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue-se:

$$\left(\int_0^1 w dz \right)^2 \leq \int_0^1 w^2 dz.$$

Usando (8.6), e a desigualdade acima, e desde que v seja não nula, temos que:

$$\frac{\rho}{2} |\mathbf{v}^0|^2 < \frac{\rho}{2} e_0.$$

Esta desigualdade implicará, depois de integrada, a dita perda.

Limite de Soluções não é Solução

A função \mathbf{v}^0 definida em (8.5) é diferenciável e, pelo Exercício 9, será solução da equação de Euler se e só se, v_3^0 for solução da equação de convecção

$$\frac{\partial v_3^0}{\partial t} = 0.$$

Examinando-se v_3^0 verifica-se que isto ocorrerá se e só se,

$$\int_0^1 w_{x_1} (x_1 - v(x_2, z) t, x_2, z) v(x_2, z) dz = 0,$$

O que não é verdade, a menos em certos casos especiais como, por exemplo, se $v \equiv 0$ ou se w for independente de x_1 (isto é, $w_{x_1} = 0$). Em geral, no entanto, a integral será não nula. Neste caso, apesar de \mathbf{v}^0 ser diferenciável e limite fraco de soluções isto não é o bastante para garantir que \mathbf{v}^0 seja solução clássica da equação de Euler.

É importante reconhecer o que causa este fenômeno. Para equações lineares, o limite fraco de soluções é solução fraca. É a não-linearidade da equação diferencial (veja a lei de conservação do momento (6.6)) que permite ao limite fraco \mathbf{v}^0 não ser solução. E' o que vemos em seguida, com detalhes.

A Lei Generalizada de Conservação do Momento

Acabamos de verificar que o limite fraco de \mathbf{v}^ϵ não é solução clássica. Por ser de classe \mathcal{C}^1 , \mathbf{v}^0 tampouco será solução fraca, (veja Proposição 65). Apesar disto, a lei de conservação do momento pode ser estendida de uma maneira natural, de tal forma a ser satisfeita pelo limite \mathbf{v}^0 . Esta é a idéia que tentamos transmitir nesta subseção.

A lei fraca de conservação do momento (6.6) pode ser reescrita na forma:

$$\langle \mathbf{p}, \phi_t \rangle = \langle T_{in}, \nabla \phi \rangle \quad (8.9)$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$, com $\operatorname{div} \phi = 0$ e onde $\mathbf{p} \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3)$ é a densidade de momento e $T_{in} \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, t_0), \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3)$ é o tensor da “força inercial”. Aceitamos agora, no entanto, que $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$, e que $T_{in} = -\rho T$, (onde ρ é uma constante), sejam distribuições mais complexas, nem sempre dadas por funções e, em particular, não exigimos que $T_{in} = -\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$. (Aliás, dada a distribuição $\mathbf{v} = \rho^{-1} \mathbf{p}$, em geral sequer podemos fazer sentido da expressão não-linear $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$). Dizemos que a lei generalizada de conservação do momento é satisfeita pelo par (\mathbf{p}, T_{in}) quando (8.9) o for. Para obter (6.6), dado \mathbf{v} , um campo de velocidades, basta tomar em (8.9), $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$ e $T_{in} = -\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$.

Dado que \mathbf{v}^ϵ é solução clássica definida em $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$, é claro então que a lei (8.9) é válida, tomando, para cada $\epsilon > 0$, $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}^\epsilon$ e $T_{in} = -\rho \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{v}^\epsilon \cdot \phi_t \, d\mathbf{x} \, dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} -\rho \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon : \nabla \phi \, d\mathbf{x} \, dt \quad (8.10)$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ com $\operatorname{div} \phi = 0$, e para todo ϵ . Da própria definição de convergência fraca e de (8.10), segue-se que (8.9) será válida com \mathbf{p} igual ao limite fraco de $\rho \mathbf{v}^\epsilon$ e T_{in} igual ao limite fraco de $-\rho \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$, isto é:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^0 \cdot \phi_t \, d\mathbf{x} \, dt = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} -\rho T : \nabla \phi \, d\mathbf{x} \, dt \quad (8.11)$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ com $\operatorname{div} \phi = 0$, com \mathbf{v}^0 dado em (8.6), e T dado em (8.7).³ (Esta afirmação pode ser também demonstrada diretamente, usando que \mathbf{v}^0 e T são diferenciáveis e satisfazem

$$\frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial t} + \operatorname{Div} T = 0,$$

³Neste exemplo, notamos que $T \neq \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{v}^0$. Isto só é possível porque a função $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ é descontínua com relação à convergência fraca. Um exemplo mais simples deste mesmo fenômeno pôde ser visto na seção 7.4 do capítulo anterior.

no sentido clássico. Verifique isto).

Agora a novidade. A noção de solução de DiPerna-Majda, que será apresentada no Capítulo 9, aceita o campo de velocidades \mathbf{v}^0 como solução da equação de Euler. Isto deve ser mais bem compreendido, e adiamos a discussão até o próximo capítulo.

8.3 Desenvolvimento de Concentrações

A Concentração da Energia Cinética

Estudaremos o fenômeno de concentração da energia cinética em um ponto no processo limite de uma sequência de soluções da equação de Euler bidimensional, (compare com Exemplo 75).⁴

Pela equação (3.22) da Seção 3.2 sabemos que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} \int_0^r s\omega(s) ds \quad (8.12)$$

é uma solução estacionária da equação de Euler em $2-D$; (veja Figura 8.1 para um possível comportamento de \mathbf{v} .)

Reescalando-se \mathbf{v} (consulte Exercício 8) construímos uma sequência de soluções da equação de Euler:

$$\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}) = \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{(-\frac{1}{2})} \epsilon^{-1} \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right). \quad (8.13)$$

Pondo

$$W(r) = \left(\int_0^r s\omega(s) ds\right)^2, \quad (8.14)$$

temos que

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{r^2} W(r). \quad (8.15)$$

Além disso,

$$|\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x})|^2 = \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1} \epsilon^{-2} \left|\mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)\right|^2.$$

Proposição 76 *Seja $\omega \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ tal que:*

$$a) \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = \lambda/2\pi \neq 0 \quad \text{com } W \text{ definido em (8.14).}$$

⁴Desenvolvimento de concentrações em outras equações não-lineares da Física-Matemática, são tratados, através de métodos formais da Teoria da Perturbação Singular, por exemplo em [47, 44].

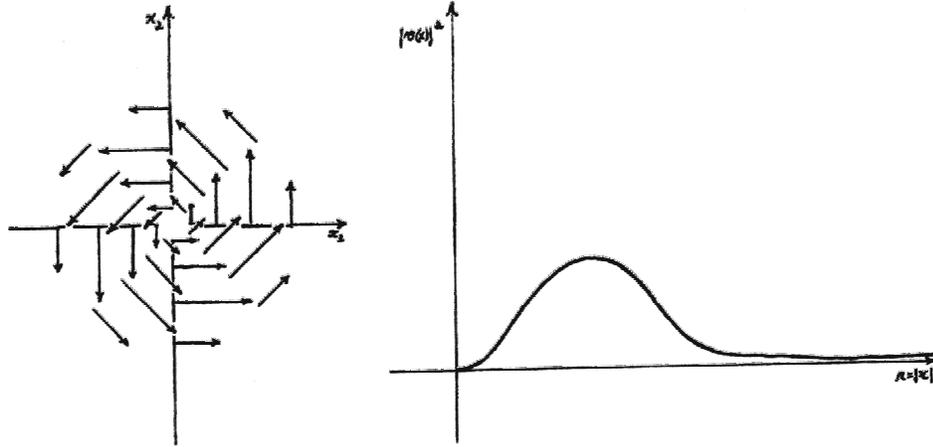


Figura 8.1: Campo de velocidades: A vorticidade de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é função do raio apenas. O quadrado da velocidade decai com $1/r^2$, $|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \sim \lambda/2\pi r^2$, $r \rightarrow \infty$.

$$b) \int_0^{+\infty} |s\omega(s)| ds = \alpha < \infty$$

$$c) \int_0^{+\infty} |s\omega(s) \ln s| ds = \beta < \infty$$

Nestas condições, a seqüência de soluções da equação de Euler dada em (8.13), (8.12) satisfaz,

$$\mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbf{0},$$

e a seqüência correspondente da energia cinética satisfaz

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}^\epsilon|^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\rho\lambda}{2} \delta, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (8.16)$$

Observação: É fácil verificar que a circulação⁵ do campo de velocidades \mathbf{v} em (8.12), num círculo de raio r em torno da origem, é

$$\Gamma_r = 2\pi \int_0^r s\omega(s) ds, \quad ,$$

e que portanto a circulação no infinito, dada por $\Gamma = \sqrt{\lambda}$, é não nula.

Demonstração (da Proposição) Verificamos que o limite fraco de \mathbf{v}^ϵ é

⁵Veja a definição de circulação de um campo de vetores no Exemplo 54.

zero. De (8.12), (8.13) e (8.14) escreve-se que

$$\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}) = \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2} W\left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sejam $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, R o raio de um disco que contenha o suporte de ϕ e L um majorante para $|\phi|$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^2 e, integrando em coordenadas polares, mostramos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \phi \cdot \mathbf{v}^\epsilon d\mathbf{x} \right| &\leq \int_{B_0(R)} |\phi| |\mathbf{v}^\epsilon| d\mathbf{x} \\ &\leq 2\pi L \left(\ln \frac{1}{\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^R W\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln(1/\epsilon))^{-1} = 0$ e dado que $W \geq 0$ é limitada por α^2 , segue-se de (8.17) que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \phi \cdot \mathbf{v}^\epsilon d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2). \quad (8.18)$$

Agora estudamos a convergência da sequência de densidades de energia cinética. Pela Fórmula de Taylor, e desde que

$$W'(r) = 2 \left(\int_0^r s\omega(s) ds \right) r\omega(r)$$

e que W é de classe \mathcal{C}^2 , existe uma constante K tal que

$$|W(h)| \leq Kh^2, \quad \forall |h| \leq 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty W'(l) \ln l dl \right| &\leq 2 \int_0^\infty \left| \int_0^l s\omega(s) ds \right| |l\omega(l) \ln l| dl \\ &\leq 2 \int_0^\infty |s\omega(s)| ds \int_0^\infty |l\omega(l) \ln l| dl \\ &\leq 2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Do que ficou dito e da hipótese a, segue-se que W/λ , com W definido em (8.14), satisfaz as condições do Teorema 73, donde concluímos (8.16). ■

No processo limite há uma perda de energia cinética pois,

$$\frac{\rho}{2} |\mathbf{v}^\epsilon|^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\rho\lambda}{2} \delta$$

ao passo que

$$\mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0,$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isto implica que a energia cinética do limite (que é zero) é menor do que o limite das energias cinéticas (que é $\rho\lambda/2$). Daí, a perda.

O Tensor da Força Inercial

Para o tensor da força inercial temos:

Proposição 77 *Assumindo as mesmas hipóteses da proposição da subseção anterior, obtemos a seguinte convergência para o tensor $\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$,*

$$\begin{pmatrix} (v_1^\epsilon)^2 & v_1^\epsilon v_2^\epsilon \\ v_2^\epsilon v_1^\epsilon & (v_2^\epsilon)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\lambda}{2} I \delta, \quad (8.19)$$

onde I denota a matriz identidade. Ou seja

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon : \Phi \, d\mathbf{x} = \frac{\lambda}{2} (\Phi_{11}(\mathbf{0}) + \Phi_{22}(\mathbf{0})), \quad (8.20)$$

para todo $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$.

Demonstração Da definição de produto tensorial (veja Capítulo 5) vem imediatamente que,

$$\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon = \frac{\mathbf{v}^\epsilon}{|\mathbf{v}^\epsilon|} \otimes \frac{\mathbf{v}^\epsilon}{|\mathbf{v}^\epsilon|} |\mathbf{v}^\epsilon|^2$$

nos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ onde $|\mathbf{v}^\epsilon|^2(\mathbf{x}) \neq 0$. Usando

$$\frac{\mathbf{v}^\epsilon}{|\mathbf{v}^\epsilon|} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{r}$$

e a definição de \otimes temos:

$$\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{r^2} & \frac{-x_1 x_2}{r^2} \\ \frac{-x_1 x_2}{r^2} & \frac{x_1^2}{r^2} \end{pmatrix} |\mathbf{v}^\epsilon|^2, \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

e, $\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon = 0$, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A matriz que aparece do lado direito da igualdade acima é definida no círculo unitário \mathcal{S}^1 . Denote-a por g_H . Então $g_H \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^1, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$ e,

$$g_H(\cos \theta, \sin \theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Seja Φ uma função teste em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$. Então, usando (8.13), vem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon : \Phi \, d\mathbf{x} &= \tag{8.21} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x})|^2 g_H \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) : \Phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \frac{1}{r^2} W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) g_H \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) : \Phi(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} 2\pi \left(\ln \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \frac{1}{r} W \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \overline{g_H : \Phi}(r) \, dr \tag{8.22} \end{aligned}$$

onde, $\overline{g_H : \Phi}$ denota a média em θ , como definido em (7.16):

$$\begin{aligned} \overline{g_H : \Phi}(r) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_H(\cos \theta, \sin \theta) : \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Notamos que a integral cujo limite é para ser calculado é análoga à que aparece em (7.17), onde, no lugar de $\overline{\varphi}(r)$ aparece $\overline{g_H : \Phi}(r)$, (com a ressalva que agora, $g_H : \Phi$ é, em geral, descontínua em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o que no entanto não afeta o desenvolvimento apresentado). É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \overline{g_H : \Phi}(r) &= \tag{8.23} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} d\theta \right] : \Phi(\mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{2} I : \Phi(\mathbf{0}) \quad . \tag{8.24} \end{aligned}$$

Usando a demonstração do Teorema 73, (compare com (7.25) e use (8.24)), concluímos que o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ de (8.21) é $\lambda g_H : \Phi(\mathbf{0})$ o que é o mesmo que: $\frac{\lambda}{2}(\Phi_{11}(\mathbf{0}) + \Phi_{22}(\mathbf{0}))$. ■

Conservação do Momento

Comentários semelhantes aos da última subseção da seção anterior cabem aqui. Apesar do limite fraco da sequência \mathbf{v}^ϵ ser nulo, e neste caso ser uma solução, ⁶ não é o que gostaríamos de ver como situação limite, pois nem $-\rho\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$, nem $\frac{\rho}{2}|\mathbf{v}^\epsilon|^2$, tendem a zero, veja equações 8.19 e 8.16.

A lei generalizada de conservação do momento, como expressa em (8.9), é válida, para cada $\epsilon > 0$, para $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}^\epsilon$ e $T_{in} = -\rho\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon$. Consequentemente, passando ao limite, vale também para $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$ e $T_{in} = -\rho T$ (com T dado no lado direito de (8.19)). Isto é consequência da definição de convergência fraca, mas é também fácil verificar diretamente:

$$\begin{aligned} \langle T_{in}, \nabla \phi \rangle &= \left\langle -\frac{\rho\lambda}{2} I \delta, \nabla \phi \right\rangle \\ &= -\frac{\rho\lambda}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\mathbf{0}) \right) \\ &= -\frac{\rho\lambda}{2} \operatorname{div} \phi(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned}$$

A continuidade (em $\epsilon = 0$) da conservação do momento como expressa no parágrafo acima, é mais natural do ponto de vista físico, e é gozada pelas soluções generalizadas cuja definição será dada no próximo capítulo. Esta é uma noção que retratará mais detalhadamente as situações limites, refutando, por exemplo, que a solução nula seja um modelo completo para a situação limite do aparecimento de concentração desta seção.

Exercício 78 (Vórtices fantasmas) Dada ω uma função diferenciável de suporte compacto, $\omega \in \mathcal{C}_0^1([0, \infty))$, tal que $\int_0^\infty s\omega(s) ds = 0$, defina v pela equação 8.12. Assuma que $\operatorname{supp}\omega \subset [0, R_0]$. Note que o campo de velocidades é nulo para $|\mathbf{x}| \geq R_0$ e as circulações no círculo de raio R_0 e no infinito são nulas. Considere a sequência de soluções da equação de Euler bidimensional,

$$\mathbf{v}^\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon^{-1} \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) ,$$

cujos suporte está contido em $B_0(\epsilon R_0)$.

Mostre que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\epsilon &\xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbf{v}^0 = \mathbf{0} \quad \text{e,} \\ \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon &\xrightarrow{\mathcal{D}'} T = c\delta I \quad , \end{aligned}$$

⁶Este fenômeno é chamado de *cancelamento de concentração* (veja [14]).

onde

$$c = \pi \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\int_0^r s\omega(s) ds \right)^2 dr .$$

(Dica: Veja a observação após o enunciado do Teorema 76 e a definição de sequência de Dirac no Capítulo 7).

Além disso, verifique que \mathbf{v}^0 é solução clássica da equação de Euler, ao passo que o par $(\rho\mathbf{v}^0, -\rho T)$ satisfaz a lei generalizada de conservação do momento (8.9).

Capítulo 9

Soluções de DiPerna-Majda

Neste capítulo não demonstraremos a maioria dos resultados enunciados. Na terceira seção, definimos solução *generalizada* de DiPerna-Majda da equação de Euler para um fluido incompressível. Expomos ainda a estrutura mais fina das soluções generalizadas e, em particular, obtemo-la para os exemplos de persistência de oscilações e de desenvolvimento de concentrações do capítulo anterior. Para o detalhamento da estrutura, noções de *Medida* e *Integração* são necessárias; uma muito breve introdução a estes assuntos será feita na segunda seção. Na primeira seção discutimos noções de Perturbações Singulares, o cenário do qual emerge a noção de solução de DiPerna-Majda.

9.1 Perturbações Singulares

Indicaremos por L^ϵ um problema que possivelmente (mas não necessariamente) depende de ϵ . Aqui, $\epsilon > 0$. A cada ϵ seja u^ϵ uma solução de L^ϵ . Isto é denotado por

$$L^\epsilon(u^\epsilon) = 0.$$

O problema L^ϵ poderá ser uma equação algébrica, uma equação diferencial ordinária, um PVI para uma EDP, ou algum outro problema. O problema L^ϵ é *regularmente perturbado* (quando $\epsilon \rightarrow 0$), se toda a sequência de soluções $\{u^\epsilon\}$ convergir uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$. Caso contrário, se existir alguma sequência de soluções $\{u^\epsilon\}$ que não convirja uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$,

o problema é chamado *singularmente perturbado*.¹

A maneira menos épica de descrever a prática de um especialista em Teoria da Perturbação Singular é a seguinte: depois de isolar uma classe $\{u^\epsilon\}$ de soluções “fisicamente relevantes” (parametrizada por ϵ), o objetivo é a obtenção do “limite” u^\natural da sequência $\{u^\epsilon\}$ e a obtenção do problema “limite”, denotado por L^\natural , que u^\natural satisfaz, $L^\natural(u^\natural) = 0$. Deixemos tudo assim muito vago.

A face computacional desta filosofia tinha, antes do advento dos computadores digitais, um papel preponderante nos cálculos científicos.

Por outro lado, seu papel em modelagem científica, já claramente salientado por Friedrichs em [23], não pára de se desenvolver. As referências [62], [54], [6], [45], [7], [31], [46], [64], contêm parte desse desenvolvimento. As técnicas, e mais, as pré-técnicas da Teoria da Perturbação Singular permeiam parte expressiva dos artigos, com ênfase teórica, de Física e de Engenharia. Mais recentemente, técnicas provenientes de Análise Real e de Análise Funcional, começaram a interagir com a filosofia da Teoria da Perturbação Singular com o intuito de estudar problemas não-lineares da Física-Matemática [15, 54, 18].

É um pouco destas idéias, aplicadas à equação de Euler, o que discutiremos no restante destas notas. Dentro do espírito de selecionar as sequências de soluções “fisicamente relevantes”, fazemos a exigência em (8.1).

DiPerna-Majda [15] introduziram a noção de solução generalizada da equação de Euler de tal forma que o “limite” v^\natural , de sequências de soluções da equação de Euler, satisfazendo a condição fisicamente natural (8.1), fosse solução generalizada da equação “limite”. De quebra, é possível mostrar-se que se $\{v^\epsilon\}$ é uma sequência de soluções da equação de Navier-Stokes (com viscosidade $\mu = \epsilon$), ainda compatível com (8.1), então o “limite” v^\natural será solução generalizada da equação de Euler, (veja [15]). De fato, mais é conhecido: DiPerna-Majda mostraram em [16] que se $\{v^\epsilon\}$ é uma sequência obtida a partir de uma aproximação da equação de Euler bidimensional através de métodos computacionais de vórtices, então o “limite” v^\natural , obtido quando o parâmetro ϵ da discretização numérica vai a zero, será solução generalizada de DiPerna-Majda da equação de Euler. (Veja [15, 16, 14] para outros resultados).

¹Os exemplos a seguir ilustram, através de equações polinomiais simples, a diferença básica entre problemas (a) regularmente perturbados, e (b) singularmente perturbados:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x^2 - x + \epsilon(1 - \epsilon) = 0 \\ \text{b)} \quad & \epsilon x^2 - x(\epsilon^2 - 1) - \epsilon = 0 \end{aligned}$$

O leitor deve trabalhar nestes exemplos.

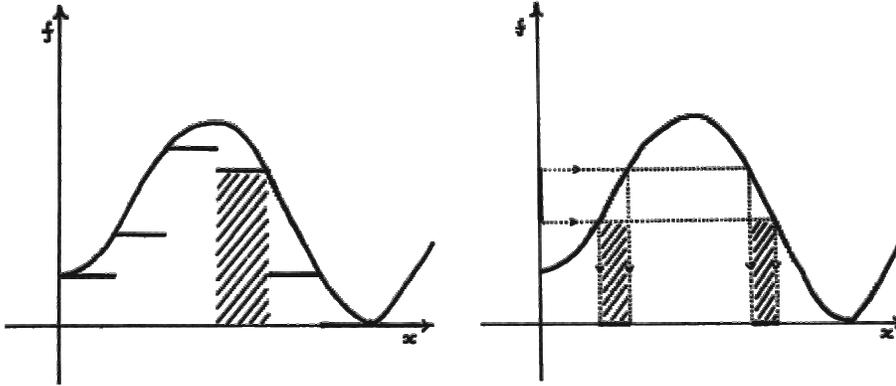


Figura 9.1: (a) Soma de Riemann: O domínio é subdividido em intervalos cada vez menores. (b) Soma de Lebesgue: O contradomínio é subdividido em intervalos cada vez menores, induzindo uma partição do domínio em subconjuntos não necessariamente “pequenos”, cada “pedaço” da partição corresponde a pontos que têm aproximadamente o mesmo valor pela função.

9.2 Noções de Medida e Integração

Introdução

Como visto no Capítulo 5, existem distribuições que são dadas por integração contra uma função, ou seja, são distribuições da forma $J = i_f$ para alguma função f em \mathcal{L}_{loc}^1 ,

$$\langle J, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega). \quad (9.1)$$

Uma generalização desta classe de exemplos é obtida usando-se *medidas* diferentes da que, apesar de não mencionada explicitamente, estar sendo utilizada na fórmula 9.1 acima. As do tipo Dirac, também apresentadas no Capítulo 5, são exemplos desta nova classe. Desenvolveremos este assunto ao longo da seção.

Comparação entre as Integrais de Riemann e de Lebesgue

Recordamos a definição de integral de Riemann. (Veja Figura 9.1a). Seja $f \geq 0$ uma função contínua definida em $[0, 1]$. Subdivide-se o domínio $[0, 1]$

em n intervalos de tamanho $1/n$ e, define-se a soma

$$SR_n(f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x_i) \quad (9.2)$$

onde, x_i é um ponto em $[i-1/n, i/n]$ e $f(x_i) = \min\{f(x), x \in [i-1/n, i/n]\}$. Então, a integral de Riemann de f é:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} SR_n(f) .$$

Damos a seguir um esboço da definição da integral de Lebesgue da função f . (Veja Figura 9.1b). Para cada n subdivide-se o contradomínio $[0, \infty)$ em intervalos de tamanho $1/n$,

$$[0, \infty) = \cup_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right)$$

e define-se

$$E_n^m = f^{-1} \left(\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right) \right) .$$

E' claro que

$$\frac{m}{n} \leq \min \{f(x), x \in E_n^m\} < \frac{m+1}{n} .$$

Considere a seguinte soma,

$$SL_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} m(E_n^m) \quad (9.3)$$

onde $m(A)$ denota o “tamanho” do conjunto $A \in \mathbb{R}$; “define-se” a integral de Lebesgue de f por

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} SL_n(f) .$$

Uma diferença crucial entre as duas definições de integral é que, enquanto que para a integral de Riemann subdivide-se o *domínio* em intervalos cada vez menores, para a integral de Lebesgue é o contradomínio que é subdividido. As duas definições dão o mesmo valor para $\int_0^1 f(x) dx$,

no entanto, a classe das funções que podemos calcular a integral de Lebesgue é maior.

Vemos que na “definição” da integral de Lebesgue, há necessidade de se considerar o tamanho de conjuntos que não são intervalos. No exemplo da

Figura 9.1b, a imagem inversa representada, consiste de dois intervalos e, não haverá dificuldade de se definir seu tamanho, mas em geral, as imagens inversas podem ser bem complicadas. Daí, a necessidade de se considerar mais detalhadamente a noção de “tamanho” de conjunto, noção esta conhecida por *medida*.

Não há possibilidade de se definir uma noção de medida de conjuntos que possa ser calculada para todos os subconjuntos de \mathbb{R}^m , digamos, em \mathbb{R}^3 , que coincida com a noção de volume para conjuntos tipo o cubo, além de ser invariante por rotações e translações, (Paradoxo de Banach-Tarski). Teremos que nos restringir a uma certa classe de subconjuntos. A classe a que iremos nos restringir é a dos conjuntos de Borel, que definiremos adiante. Além disso, imagens inversas de intervalos, como as consideradas no lado direito de (9.3), são os conjuntos que estamos interessados em computar a medida. Como estes têm que ser “medidos” pela medida, terão que pertencer à classe dos conjuntos de Borel. Esta condição acaba se traduzindo numa restrição ao tipo de função que pode ser integrada.

Medida

Uma exposição mais sistemática bem como as demonstrações dos resultados desta subseção, podem ser encontrados em [22].

Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ é *de Borel* (ou *boreliano*), se pode ser obtido, partindo dos abertos, por um número enumerável de aplicações das operações de união, de interseção, e de tomar o complementar. Denote por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, a coleção de todos os conjuntos de Borel em \mathbb{R}^m e, dado $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, defina $\mathcal{B}(\Omega) = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m); E \subset \Omega\}$, o conjunto dos borelianos em Ω .

O conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) Se $E \in \mathcal{B}$, então o complementar de E em Ω está em \mathcal{B} , $E^c = \Omega \setminus E \in \mathcal{B}$.
- (b) Se $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$, então $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$.
- (c) $\Omega \in \mathcal{B}$.

Estas propriedades mostram que $\mathcal{B}(\Omega)$ é uma σ -álgebra. Os elementos de $\mathcal{B}(\Omega)$ são chamados de conjuntos *mensuráveis*.

(Exercício: (a) Mostre que $E = E \setminus F + E \cap F$ e se $E, F \in \mathcal{B}$, então $E \setminus F \in \mathcal{B}$ e $E \cap F \in \mathcal{B}$. (b) Sejam $E_i \in \mathcal{B}$ para $i \in \mathbb{N}$. Mostre que $\cap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$.)

Uma *medida positiva* em Ω é uma aplicação²

$$\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

com as seguintes propriedades:³

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$ onde \emptyset denota o conjunto vazio.
 (b) (σ -aditiva) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ se $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i, j \in \mathbb{N}$.

(Exercício: Mostre que μ é *monótona* no sentido que $E \subset F$ implica $\mu(E) \leq \mu(F)$, em particular, $\mu(E) \leq \mu(\Omega)$ e, se $\mu(\Omega)$ for finito, a medida de qualquer conjunto também o será).

Exemplo 79 (a) A medida delta de Dirac é dada por:

$$\delta(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{0} \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Considere a seguinte medida na reta:

$$e(E) = \#(E \cap \{-n^2; n \in \mathbb{Z}_+\})$$

onde $\#(A)$ é o número de elementos de A se, A tem um número finito de elementos, e ∞ caso contrário.⁴

Exemplo 80 (*Medida de Lebesgue*) Construímos a seguir a *medida de Lebesgue* em \mathbb{R}^m , que denotaremos por m . Quando $m = 1, 2$ ou 3 , a medida m corresponderá às noções usuais de comprimento, área e volume. Um *m-retângulo* em \mathbb{R}^m (ou simplesmente um *retângulo*) é um conjunto da forma

$$R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m), \quad a_i, b_i \in (-\infty, +\infty).$$

²Devemos operar com ∞ da seguinte maneira “natural”:

$$\begin{aligned} a \cdot \infty &= \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & a \in (0, \infty) \\ 0, & a = 0 \end{cases} \quad \text{e,} \\ a + \infty &= \infty + a = \infty, \quad a \in [0, \infty) \end{aligned}$$

³Na verdade, não há necessidade do domínio de uma medida ser $\mathcal{B}(\Omega)$, basta que seja uma σ -álgebra. Mas não precisamos aqui desta generalidade. O crucial é que a extensão acima referida da noção de volume, dada pela medida de Lebesgue *pode* ser definida em $\mathcal{B}(\Omega)$.

⁴Claramente, as medidas definidas neste exemplo dão uma noção de “tamanho” de conjuntos mas, evidentemente, não coincidem com a noção usual de “volume” em \mathbb{R}^m ; esta extensão é realizada pela medida de Lebesgue.

Para estes, definimos

$$m(R) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i) \quad .$$

Se $E = \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ onde cada R_j é um retângulo e $R_j \cap R_l = \emptyset$, se $j \neq l$, então definimos

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) \quad .$$

Denotaremos por \mathcal{R} a família das uniões enumeráveis de retângulos disjuntos. Finalmente, se F é um conjunto qualquer em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, definimos:

$$m(F) = \inf\{m(E); E \supset F, E \in \mathcal{R}\} \quad .$$

Uma medida positiva μ em Ω é *externamente regular* em E se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A); A \supset E, A \text{ aberto}\} \quad ,$$

é *internamente regular* em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto}\}$$

e, é *regular* em E se for externa e internamente regular em E . Se μ é regular em todos os conjuntos de Borel em Ω , então μ é chamada de *regular*.

(Exercício: Mostre que se μ é regular em E , então dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem um compacto K e um aberto A tais que $K \subset E \subset A$ e $\mu(A) - \epsilon \leq \mu(E) \leq \mu(K) + \epsilon$).

Definição 81 *Uma medida positiva é uma medida de Radon positiva se é regular e finita nos conjuntos compactos. Será medida de Radon positiva finita se, adicionalmente, for finita para todos os conjuntos de Borel.*

Exemplo 79a é uma medida de Radon positiva finita e as do item b e do Exemplo 80 são apenas medidas de Radon positivas. Seja $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ um conjunto limitado. Como $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ podemos considerar a medida de Lebesgue restrita a $\mathcal{B}(\Omega)$. Esta será uma medida de Radon positiva finita.

Denotaremos por $M^+(\Omega)$ o conjunto das medidas de Radon positivas finitas em Ω , por $\text{Prob}(\Omega) = \{\mu \in M^+(\Omega); \mu(\Omega) = 1\}$, o conjunto das *medidas de probabilidade* e por $M(\Omega) = \{\mu = \mu_1 - \mu_2; \mu_1, \mu_2 \in M^+(\Omega)\}$, o conjunto das *medidas de Radon* (com sinal).

Uma medida de Radon μ é *nula* em $N \in \mathcal{B}(\Omega)$

se $\mu(F) = 0$, para todo $F \in \mathcal{B}(\Omega)$, com $F \subset N$. Duas medidas de Radon μ_1 e μ_2 são *mutuamente singulares* (ou μ_1 é *singular com respeito a* μ_2 , ou

vice-versa), se existem conjuntos $N_1, N_2 \in \mathcal{B}(\Omega)$, complementares em Ω , tais que μ_1 se anula em N_1 e μ_2 se anula em N_2 . Expressamos esta relação por $\mu_1 \perp \mu_2$.

Teorema 82 *Se μ é uma medida de Radon (com sinal), então existe um único par (μ^+, μ^-) de medidas de Radon positivas, mutuamente singulares, decompondo μ no sentido que*

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad . \quad (9.4)$$

As medidas μ^+ e μ^- são denominadas as *variações positiva e negativa* de μ e, equação 9.4 dá a *Decomposição de Jordan* de μ .⁵ A *variação total* de μ , é a medida positiva $|\mu|$ dada por $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Seja Ω um aberto. Dada $\mu \in M^+(\Omega)$, denote por A , a união de todos os abertos onde μ é nula e, defina o *suporte* de μ , $\text{supp}\mu = \Omega \setminus A$. Dada $\nu \in M(\Omega)$, o *suporte* de ν é a união do suporte de suas variações positiva e negativa, ou seja, $\text{supp}\nu = \text{supp}\nu^+ \cup \text{supp}\nu^-$.

Exercício 83 Mostre que se as medidas μ_1 e μ_2 têm suportes disjuntos,

$$\text{supp}\nu_1 \cap \text{supp}\nu_2 = \emptyset,$$

então $\mu_1 \perp \mu_2$. Mostre que o recíproco não é verdadeiro, isto é, exiba μ_1 e μ_2 tais que, $\mu_1 \perp \mu_2$ mas

$$\text{supp}\nu_1 \cap \text{supp}\nu_2 \neq \emptyset.$$

Integração

Uma função real f definida em Ω é *mensurável* em $\mathcal{B}(\Omega)$ se os conjuntos da forma $f^{-1}([a, b))$, com a e b arbitrários, forem conjuntos mensuráveis, isto é, pertençam a $\mathcal{B}(\Omega)$. É fácil ver que toda função contínua é mensurável. Se f é mensurável, o mesmo vale para f^+ e f^- , as partes positiva e negativa da função f , (veja definição na nota de rodapé à página 130). Sejam E_i , $1 \leq i \leq n$ subconjuntos mensuráveis. Uma função da forma

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(\mathbf{x})$$

onde c_i são constantes e χ_{E_i} é a função característica de E_i , é chamada de *função simples*. Estas são mensuráveis. É possível mostrar que, dada uma

⁵ Esta decomposição é análoga à decomposição de uma função f em suas partes positiva e negativa, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ onde $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. De fato, veja Exemplo 84.

função f definida em Ω , mensurável e não-negativa, existe uma sequência de funções simples, tal que: $f_n(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ e,

$$f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \text{ quando } n \rightarrow \infty ,$$

onde \rightarrow denota convergência em \mathbb{R} , para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, (convergência pontual).

Seja μ uma medida positiva regular. Dadas s , uma função simples, e E , um subconjunto de Ω , define-se

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) .$$

Dada f , uma função mensurável não negativa, define-se a integral de f com respeito à medida μ no conjunto $E \in \mathcal{B}(\Omega)$, pela expressão do lado direito da fórmula abaixo:

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \sup \{I_E(s); s \text{ simples com } 0 \leq s \leq f\} .$$

Observe que o lado direito da expressão acima pode ser infinito. (O lado esquerdo é apenas notação, em particular, $d\mu$ não tem significado. No entanto, sua presença indica que a medida sendo usada é μ). Se μ é m , a medida de Lebesgue, a integral acima é a *integral de Lebesgue* da função f em E . Se f for, por exemplo, uma função contínua de suporte compacto, as integrais de Riemann e de Lebesgue coincidem. O leitor deve se convencer de que, intuitivamente, a “definição” dada na subseção anterior coincide com esta.

Sejam f , uma função mensurável qualquer, e μ , uma medida de Radon em $M(\Omega)$. Diz-se que f é *integrável com respeito à medida μ* , se,

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d|\mu|(\mathbf{x}) < \infty$$

e, denota-se, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Neste caso, define-se a integral de f com respeito a μ no conjunto E :

$$\begin{aligned} \int_E f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) &= \int_E f^+(\mathbf{x}) d\mu^+(\mathbf{x}) + \int_E f^-(\mathbf{x}) d\mu^-(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_E f^+(\mathbf{x}) d\mu^-(\mathbf{x}) - \int_E f^-(\mathbf{x}) d\mu^+(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Notamos que cada uma das quatro integrais do lado direito da expressão acima fazem sentido, pois envolvem integrais de funções positivas com relação a medidas positivas e, cada uma delas é finita pois limitadas por $\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d|\mu|(\mathbf{x})$, donde o lado direito está bem definido.

(Exercício: Mostre que:

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \left(\int_E d|\mu| \right), \quad \forall E, \forall f \in \mathcal{BC}(\Omega) \text{).}$$

Dadas $\mu \in M(\Omega)$ e $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, define-se uma nova medida de Radon (verifique), aqui denotada por $f\mu$, (por vezes, denotada por $f d\mu$), dada por:

$$f\mu(A) = \int_A f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \text{ .}$$

Exemplo 84 Dada $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{m})$ uma função integrável com respeito à medida de Lebesgue, defina μ_g , uma medida de Radon, pela fórmula:

$$\mu_g(E) = \int_E g(\mathbf{x}) d\mathfrak{m}(\mathbf{x}) \text{ ,}$$

isto é, $\mu_g = g\mathfrak{m}$. Dada $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^m)$, é fácil verificar que

$$\mu_{f+} \perp \mu_{f-} \text{ e } \mu_f = \mu_{f+} - \mu_{f-}$$

donde (μ_{f+}, μ_{f-}) é o par correspondente à medida μ_f , definido pelo Teorema 82. Além disso, $|\mu_f| = \mu_{|f|}$.

Enunciado do Teorema da Representação de Riesz-Markov e Exemplos

Seja Ω um subconjunto de \mathbb{R}^m . Diz-se que uma função f se *anula no infinito* se, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existir um compacto $C \subset \Omega$ tal que $|f(\mathbf{x})| < \epsilon$, para todo \mathbf{x} em $\Omega \setminus C$. Definimos $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$, o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito; $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$ munido com a norma do \sup é um espaço de Banach.

Exercício 85 (a) Mostre que $\mathcal{C}_\infty^0((0, 1)) \subset \mathcal{C}_\infty^0([0, 1])$, isto é, dado g em $\mathcal{C}_\infty^0((0, 1))$ mostre que existe uma extensão de g , denotada por \tilde{g} , tal que \tilde{g} é um elemento de $\mathcal{C}_\infty^0([0, 1])$ e, que a aplicação $g \mapsto \tilde{g}$ é injetora. Por outro lado, exiba f em $\mathcal{C}_\infty^0([0, 1])$ tal que sua restrição a $(0, 1)$ não pertence a $\mathcal{C}_\infty^0((0, 1))$.

(b) Dado um compacto K , verifique que

$$\mathcal{C}_\infty^0(K) = \mathcal{C}_0^0(K) = \mathcal{BC}(K) = \mathcal{C}^0(K) \text{ .}$$

(c) Dado um aberto Ω , mostre que

$$\mathcal{C}_\infty^0(\Omega) \subset \mathcal{C}_0^0(\Omega) \subset \mathcal{BC}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ .}$$

Dê funções definidas em $\Omega = (0, 1)$ mostrando que as inclusões acima são estritas.

O *dual* de $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$, denotado por $[\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)]^*$ é o conjunto dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$, ou seja, $\alpha \in [\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)]^*$ se e só se,

$$\langle \alpha, f_n \rangle \rightarrow \langle \alpha, f_\infty \rangle, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

para toda a sequência $\{f_n\}$ e f_∞ em $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$ tais que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f_\infty$. Aqui, como no caso de distribuições, $\langle \alpha, f \rangle$ denota o valor do funcional α em f . Devido à linearidade, para a verificação da continuidade de α , bastam as sequências em $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$ convergindo *uniformemente* a zero.

Seja Ω um conjunto aberto ou fechado em \mathbb{R}^m . Pode-se mostrar que

$$M(\Omega) \subset [\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)]^*$$

no seguinte sentido: dada uma medida de Radon $\nu \in M(\Omega)$, definimos um funcional linear, ainda denotado por ν , em $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$ pela fórmula abaixo

$$\langle \nu, g \rangle = \int_{\Omega} g(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}), \forall g \in \mathcal{C}_\infty^0(\Omega).$$

Usando as propriedades da integral, não é difícil mostrar que este funcional linear é contínuo.

(Como exemplo, se ν for igual a δ , a medida de Dirac, o funcional linear associado será $\mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^3) \ni g \mapsto g(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}$.)

Reciprocamente, dado um funcional linear contínuo $l \in [\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)]^*$, é possível mostrar que existe uma única medida de Radon $\alpha \in M(\Omega)$ tal que

$$\langle l, g \rangle = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\alpha(\mathbf{x}), \quad \forall g.$$

Resumimos este resultado, que é conhecido como Teorema da Representação de Riesz-Markov, abaixo:

Teorema 86 (Riesz-Markov)⁶ Dado Ω , um subconjunto aberto ou fechado de \mathbb{R}^m , temos que: $M(\Omega) = [\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)]^*$.

Usando este Teorema, notamos que é possível definir-se uma medida através de sua atuação em \mathcal{C}_∞^0 , isto é, dando-se um funcional linear contínuo em \mathcal{C}_∞^0 . Faremos uso deste fato.

Exercício 87 Dados Ω , um aberto em \mathbb{R}^m e g , uma função em $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$, mostre que a extensão de g dada por

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega \end{cases}$$

⁶Consulte [22, 51].

pertence a $\mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^m)$. A aplicação

$$\begin{aligned} i : \mathcal{C}_\infty^0(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^m) \\ g &\longmapsto i_g = \tilde{g} \end{aligned}$$

é injetora e portanto, $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$ pode ser considerado um subconjunto de $\mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^m)$. Assim dado μ em $M(\mathbb{R}^m)$ restringindo-se sua atuação a $\mathcal{C}_\infty^0(\Omega)$, define-se aí um funcional linear; denote-o ainda por μ e mostre que $\mu \in M(\Omega)$. Resulta que $M(\mathbb{R}^m) \subset M(\Omega)$.

Exemplo 88 O leitor deve verificar que os funcionais lineares apresentados a seguir são contínuos em \mathcal{C}_∞^0 ; pelo Teorema de Riesz-Markov, de novo, definem medidas de Radon. Além disso, generalizam a medida de Dirac. São singulares com respeito à medida de Lebesgue.

(a) (Dimensão zero) Medida não uniforme sobre os pontos $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_N\}$:

$$\langle A, g \rangle = \sum_{j=1}^N a_j g(\mathbf{h}_j), \quad \forall g \in \mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^3).$$

Os números reais a_1, \dots, a_N , não todos iguais, são os *pesos*.

(b) (Dimensão um) Medida uniforme sobre uma curva: seja $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função injetora e diferenciável e, denote por C , a curva determinada pela imagem de \mathbf{c} , ($C = \mathbf{c}([0, 1])$). Defina a medida:

$$\begin{aligned} \langle K, g \rangle &= \int_C g|_C dl \\ &= \int_0^1 g(\mathbf{c}(s)) \left| \frac{d\mathbf{c}}{ds}(s) \right| ds, \quad \forall g \in \mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

onde $f|_A$ denota a restrição da função f ao conjunto A e dl denota o elemento de comprimento da curva.

(c) (Dimensão um) Medida não uniforme sobre uma curva: seja a uma função não constante em $\mathcal{C}^0([0, 1])$; define-se a medida

$$\begin{aligned} \langle N, g \rangle &= \int_C g|_C a dl \\ &= \int_0^1 g(\mathbf{c}(s)) a(s) \left| \frac{d\mathbf{c}}{ds}(s) \right| ds, \quad \forall g \in \mathcal{C}_\infty^0(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Observação: Assuma que $|\mathbf{c}(s)| = 1$ para todo s em $[0, 1]$. Então podemos, analogamente, definir uma medida em $\mathcal{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$,

$$\langle N, g \rangle = \int_0^1 g(\mathbf{c}(s)) a(s) \left| \frac{d\mathbf{c}}{ds}(s) \right| ds, \quad \forall g \in \mathcal{C}_\infty^0(\mathcal{S}^2) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^2).$$

(d) (Dimensão dois) Medida não uniforme sobre uma superfície: seja \mathbf{u} uma função injetora em $\mathcal{C}^1([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R}^3)$, cuja imagem define uma superfície M e seja a uma função “peso” em $\mathcal{C}^0([0, 1] \times [0, 1])$. Define-se uma medida em \mathbb{R}^3 através da fórmula:

$$\begin{aligned} \langle K, g \rangle &= \int_M g|_M dS \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g(\mathbf{u}(s_1, s_2)) a(s_1, s_2) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_2} \right| ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

onde dS denota o elemento de área da superfície.

(e) (Dimensão dois) A medida uniforme sobre a esfera unitária é dada por:

$$\begin{aligned} \langle U, g \rangle &= \int_{S^2} g|_{S^2} dS \\ &= \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi g(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

onde ϕ e θ são, respectivamente, os ângulos de longitude e de latitude da esfera.

Observação: É claro que a medida U pode ser definida em $\mathcal{C}^0(S^2)$. Além disso, pode-se construir uma medida não uniforme a partir de U , para tanto basta multiplicar o integrando na integral acima por uma função *peso* não constante.

Exercício 89 (*Medidas são Distribuições*)⁷ Dados um aberto Ω em \mathbb{R}^m e μ uma medida em $M(\Omega)$, defina o funcional i_μ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ pela fórmula

$$\langle i_\mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \quad (9.5)$$

Mostre que i_μ é uma distribuição pertencente a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mostre ainda que a aplicação

$$\begin{aligned} i : M(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ \mu &\mapsto i_\mu, \end{aligned}$$

com i_μ definido em (9.5), é injetora e, portanto, podemos considerar $M(\Omega)$ como um subconjunto de $\mathcal{D}'(\Omega)$.⁸ Denotaremos a distribuição i_μ por μ apenas.

⁷Compare com o primeiro parágrafo desta seção.

⁸Pode assumir que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$, isto é, dado $\phi \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$, existe sequência $\{\phi_n\}$ tal que,

$$\phi_n \xrightarrow{unif} \phi, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Use o Teorema de Riesz-Markov.

A este respeito vale comparar as noções de *mutuamente singulares* e de distribuições com *suportes disjuntos*. Especificamente, verifique o seguinte resultado: Dadas $\mu, \nu \in M(\Omega)$ mostre que se $\text{supp}i_\mu \cap \text{supp}i_\nu = \emptyset$, então $\mu \perp \nu$. (Dica: Use Exercício 83, Teorema de Riesz-Markov e densidade de C_0^∞ em C_0^0 .)

9.3 Soluções Generalizadas

Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$. Dada uma sequência de funções $\{\mathbf{v}^\epsilon\}$ satisfazendo a condição 8.1, é possível mostrar-se (mas não o faremos aqui) que existem uma subsequência de \mathbf{v}^ϵ (ainda denotada por \mathbf{v}^ϵ), uma função \mathbf{v}^0 em \mathcal{L}_{loc}^2 , e uma distribuição $T \in \mathcal{D}'$ tais que⁹

$$\mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbf{v}^0 \quad \text{e}, \quad (9.6)$$

$$\mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} T, \quad (9.7)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^\epsilon, \phi \rangle &\rightarrow \langle \mathbf{v}^0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{e} \\ \langle \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{v}^\epsilon, \Phi \rangle &\rightarrow \langle T, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3) \quad . \end{aligned}$$

Definição 90 Considere uma sequência de funções $\{\mathbf{v}^\epsilon\}$ satisfazendo condição 8.1. A função \mathbf{v}^0 definida a partir da sequência \mathbf{v}^ϵ como em (9.6) é solução generalizada de DiPerna-Majda da equação de Euler para um fluido incompressível se satisfaz a lei generalizada de conservação do momento, isto é, se

$$\langle \mathbf{v}^0, \phi_t \rangle + \langle T, \nabla \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{com } \text{div } \phi = 0, \quad (9.8)$$

onde T é definido em (9.7), e se \mathbf{v} for incompressível no sentido das distribuições.

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 91 Seja $\{\mathbf{v}^\epsilon\}$ sequência de soluções fracas de Leray-Hopf da equação de Euler para um fluido incompressível satisfazendo adicionalmente (8.1). Então o campo de velocidades \mathbf{v}^0 dado em (9.6) é solução generalizada de DiPerna-Majda da equação de Euler.

⁹Isto decorre dos Teoremas de Banach-Alaoglu, de Riesz, e de Riesz-Markov que são expostos em, por exemplo, [51].

Demonstração A lei generalizada de conservação do momento é satisfeita e a verificação é imediata a partir de (9.6) e de (9.7), uma vez que \mathbf{v}^ϵ é solução fraca da equação de Euler. Além disso, é fácil mostrar que (9.7) implica

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \operatorname{div} \mathbf{v}^0 .$$

Da convergência acima e da incompressibilidade de \mathbf{v}^ϵ , segue-se a de \mathbf{v}^0 . ■

Como casos particulares em que esta Proposição se aplica, temos as sequências de soluções exibindo persistência de oscilações e desenvolvimento de concentrações, do capítulo anterior. Um exemplo mais simples é fornecido por uma sequência constante $\mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{v}$ onde \mathbf{v} é uma solução fraca de Leray-Hopf. Neste caso, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}$ e $T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, e conclui-se da Proposição que \mathbf{v} é uma solução generalizada de DiPerna-Majda. Há aqui uma quebra com a “tradição”. Não mais é verdade que um campo de velocidades em \mathcal{L}^2_{loc} será solução generalizada se e somente se for solução fraca, uma vez que, o campo de vetores limite do exemplo de persistência de oscilações do capítulo anterior, é diferenciável e é *solução generalizada* mas não é *solução fraca* (nem clássica).

Estrutura das Soluções Generalizadas

Dada uma sequência satisfazendo (8.1) é ainda verdade que existe uma subsequência que, além de satisfazer (9.6) e (9.7), satisfaz

$$|\mathbf{v}^\epsilon|^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \nu$$

onde ν pertence a $M^+(\Omega)$.

Mais vale. Seja $H \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^2, \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3)$,

$$H(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \otimes \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

(É claro que são desnecessários os denominadores $|\mathbf{v}|$ na expressão acima uma vez que $|\mathbf{v}| = 1$ para \mathbf{v} em \mathcal{S}^2). Se Γ é uma medida em $M(\mathcal{S}^2)$, denota-se por $\langle \Gamma, H \rangle$ a matriz

$$\langle \Gamma, H \rangle = \int_{\mathcal{S}^2} H(\mathbf{v}) d\Gamma(\mathbf{v}) .$$

Então, existe uma família de medidas de probabilidade definidas em \mathcal{S}^2 , parametrizada pelos pontos do espaço-tempo, (veja Figura 9.2), representando

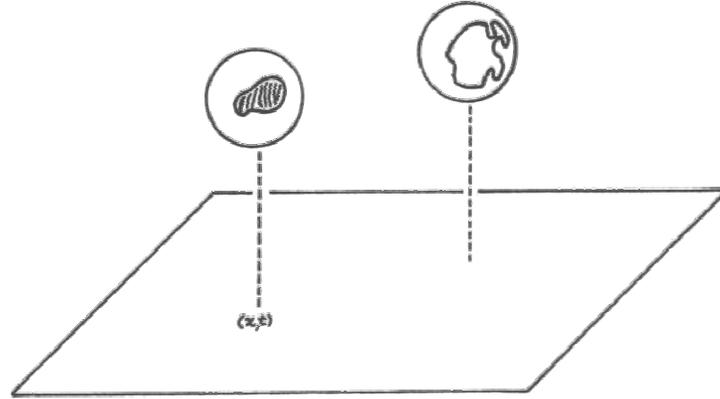


Figura 9.2: Fibrado trivial de esferas.

T no seguinte sentido¹⁰: Para cada $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ existe $\Lambda_{(\mathbf{x}, t)} \in \text{Prob}(\mathcal{S}^2)$ tal que

$$T = \langle \Lambda_{(\cdot, \cdot)}, H \rangle d\nu$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle T, \Phi \rangle &= \int_{\Omega} \langle \Lambda_{(\mathbf{x}, t)}, H \rangle : \Phi(\mathbf{x}, t) d\nu(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathcal{S}^2} H(\mathbf{v}) d\Lambda_{(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{v}) \right) : \Phi(\mathbf{x}, t) d\nu(\mathbf{x}, t) . \end{aligned}$$

Fixe (\mathbf{x}, t) . Em linguagem de probabilidade, $\langle \Lambda_{(\mathbf{x}, t)}, H \rangle$, dada pela integral entre parêntesis acima, é o valor esperado da variável aleatória (matricial) H , para a medida de probabilidade $\Lambda_{(\mathbf{x}, t)} \in \text{Prob}(\mathcal{S}^2)$, no ponto (\mathbf{x}, t) do espaço-tempo. Denote a família $\Lambda_{(\mathbf{x}, t)}$, com $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ por Λ .

Finalmente, usando Proposição 62, concluímos que \mathbf{v}^0 é solução de Diperna-Majda da equação de Euler se, no sentido das distribuições,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^0 + \rho \text{Div} (\langle \Lambda, H \rangle d\nu) + \nabla p = 0, \quad \text{div } \mathbf{v}^0$$

¹⁰Este resultado é provado em [15]; é uma generalização do Teorema da Medida Parametrizada de Young. O Teorema de Young trata da representação do limite fraco da sequência de funções obtida da composição de uma função não-linear com uma sequência de funções limitadas na norma do sup . A generalização considera sequências obtidas da composição de funções não lineares com sequências de funções limitadas em \mathcal{L}^2 .

para alguma distribuição p .

Na próxima subseção escrevemos as triplas $(\mathbf{v}^0, \nu, \Lambda)$ correspondentes às sequências de soluções da equação de Euler do capítulo anterior.

Exemplos

E' fácil verificar que a estrutura detalhada das soluções de Leray-Hopf é como a seguir,

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}, \quad d\nu(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} dt \quad \text{e} \quad \Lambda_{(x,t)} = \delta_{(v(x,t)/|v(x,t)|)}$$

onde $\delta_{\mathbf{h}}$, com \mathbf{h} em \mathcal{S}^2 , denota a medida de Dirac em \mathbf{h} , a medida de probabilidade para a qual \mathbf{h} ocorre com probabilidade 1, isto é,

$$\langle \delta_{\mathbf{h}}, g \rangle = g(\mathbf{h}) \quad \forall g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^2) \quad .$$

Em situações mais complexas, o tensor da força inercial, que é proporcional a T , (de fato igual a $-\rho T$), tem também estrutura mais complexa. Vejamos isto no exemplo de intensificação de oscilações no limite, do capítulo anterior. Nesta situação o campo de velocidades limite \mathbf{v}^0 foi dado em (8.6) e temos que,

$$d\nu = e_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$$

onde e_0 foi obtido em (8.8). Fixado $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$, a medida de probabilidade $\Lambda_{(x,t)}$ é análoga à do Exemplo 88c, onde, desta vez, a curva \mathbf{u} e o peso a , parametrizados por $z \in [0, 1]$, são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, z) &= \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, z)}{|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, z)|} \quad \text{e,} \\ a(\mathbf{x}, t, z) &= \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, z)|^2}{|\mathbf{u}_z(\mathbf{x}, t, z)|} e_0 \end{aligned}$$

com \mathbf{v} definido em (8.4) e, tem-se que

$$\int_{\mathcal{S}^2} f(\mathbf{v}) d\Lambda_{(x,t)}(\mathbf{v}) = \int_0^1 f(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, z)) a(\mathbf{x}, t, z) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(\mathbf{x}, t, z) \right| dz.$$

Notamos neste exemplo a indefinição da direção do vetor velocidade limite, no que diz respeito à sua influência sobre a força inercial, uma vez que $\Lambda_{(x,t)}$ não é mais a distribuição de Dirac num ponto.

O aparecimento de concentração num ponto, presente no exemplo do capítulo anterior, exhibe um comportamento semelhante no que diz respeito à

“dispersão” da probabilidade na esfera unitária. Tratando-se de um exemplo bidimensional, a esfera aqui se trata do círculo unitário. A distribuição limite da velocidade é $\mathbf{v}^0 = 0$, e a de $|\mathbf{v}^\epsilon|^2$ é $\nu = \delta_0$. Temos ainda que Λ_x é a medida de probabilidade uniformemente distribuída no círculo unitário \mathcal{S}^1 ; seja $\mathbf{c}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, então,

$$\int_{\mathcal{S}^1} f(\mathbf{v}) d\Lambda_x(\mathbf{v}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

ou seja, $d\Lambda_x = d\theta/2\pi$.

9.4 Última Seção

Abrimos aqui um parêntese para contar uma anedota: Quando Einstein morreu e foi para o Paraíso, ele perguntou ao Artífice acerca da Teoria da Grande Unificação (GUT). O Grande Equacionista desvendou uma bela teoria e rapidamente a sala de seminários celestial estava repleta de fórmulas harmoniosas. Encorajado por aquela resposta divina, Einstein então perguntou acerca da Teoria da Turbulência. Repentinamente, a sala de seminários escureceu e uma voz trovejante ordenou a alma impudente a se retirar imediatamente.

O estudo de fenômenos de Turbulência em Fluidos e em outras partes da Física, é uma área de pesquisa onde tem havido intensa atividade ao longo das últimas décadas, (veja [17]), tendo motivado desenvolvimentos em outras áreas. Em particular, a motivação inicial para a introdução da equação de Burgers e da equação de Lorenz, exemplos muito estudados, respectivamente, nas áreas de Sistemas de Leis de Conservação Hiperbólica, (veja [35]), e Sistemas Dinâmicos (veja [49]), foi a possibilidade de considerar modelos mais simples que ainda exibissem comportamento complexo e algumas das propriedades da Turbulência em Fluidos. Aliás, estas equações são simplificações, (respectivamente dimensional, e espectral), das equações de Navier-Stokes.

A complexidade do movimento de fluidos, em especial, os desdobramentos de situações instáveis,¹¹ exibindo variações repentinas da velocidade no tempo e no espaço, deixa antever as dificuldades de entendimento teórico a da obtenção de soluções numéricas, com boa precisão, em tais casos.

Estes *Cenários Turbulentos* são bastante comuns em fluxos reais. Segundo Lugt [40, pág. 120], as características fundamentais de Turbulência são:

¹¹Veja, por exemplo, [61], [40], [11] e [34].

- (a) Turbulência é um movimento irregular de um fluido no qual quantidades físicas como a velocidade e a pressão oscilam no espaço e no tempo.
- (b) Turbulência é um processo de troca, o qual é muitas vezes mais rápido do que a difusão da vorticidade num fluxo “laminar”.
- (c) Energia é transportada, em geral, de grandes redemoinhos para pequenos.
- (d) Turbulência não é um processo puramente estatístico, uma vez que estruturas coerentes de vorticidade, de longa duração, existem dentro dela.

Antecedendo uma resolução turbulenta de um fluxo há usualmente presente uma discrepância nas intensidades das várias forças presentes, (forças de viscosidade, de pressão, externa e “força inercial”), criando uma situação instável. (Consulte [40]). A “harmonização” de tal situação “conflitante” se dá, então, através do surgimento de “Turbulência”.

Crê-se que a “harmonização” propiciada pela Turbulência seja um processo no qual as leis fundamentais de conservação para o movimento de fluidos não sejam violadas.

A noção de solução Diperna-Majda da Equação de Euler incompressível foi introduzida com o intuito de dar conta da complexidade de fenômenos exibidos por sequências de soluções da Equação de Euler e para, possivelmente, abranger fenômenos turbulentos. Já mencionamos anteriormente e repetimos por ênfase, que esta noção aceita como solução da Equação de Euler, limites de *regularizações* desta mesma equação. (Como, por exemplo, a regularização dada pela Equação de Navier-Stokes quando a viscosidade vai a zero, ou uma regularização por discretização numérica quando o parâmetro de discretização vai a zero). Além disto, esta noção de solução é centrada na idéia de manter *válida* uma *Lei* apropriada de *Conservação do Momento* e a continuidade das variáveis físicas, em particular da energia cinética e do momento, no limite.

Apêndice A

EDPs lineares de 1^a ordem

Consideramos neste Apêndice o *problema de Cauchy* para uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem:

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y) \\ u(\gamma(s)) = u_0(s) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

São dadas as funções reais deriváveis a , b , c e d , definidas em \mathbb{R}^2 , ou em um aberto de \mathbb{R}^2 ; uma curva derivável $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$; e uma função real derivável $u_0(s)$, o parâmetro s variando em um intervalo, limitado ou ilimitado. Uma solução de (A.1) é uma função derivável u que satisfaça a equação diferencial e assuma o valor prescrito $u_0(s)$ sobre a curva dada $\gamma(s)$. Como caso particular, quando $y = t$ denota o tempo e a curva inicial $\gamma(s) = (s, 0)$ é o eixo dos x , temos um *problema de valor inicial*.

Suponha que exista uma solução $u(x, y)$ de (A.1). Pode-se obter informações muito úteis a respeito de u através do estudo das curvas integrais do campo vetorial $(a(x, y), b(x, y))$, ou seja, das curvas $(x(\tau), y(\tau))$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y) \end{cases} .$$

Tais curvas são denominadas *curvas características* da equação diferencial parcial em (A.1).

Dadas uma solução $u(x, y)$ e uma curva característica $(x(\tau), y(\tau))$, calculemos a derivada em relação a τ da função composta $u(x(\tau), y(\tau))$, usando a regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\tau}u(x(\tau), y(\tau)) = x'(\tau)u_x(x(\tau), y(\tau)) + y'(\tau)u_y(x(\tau), y(\tau)) \quad .$$

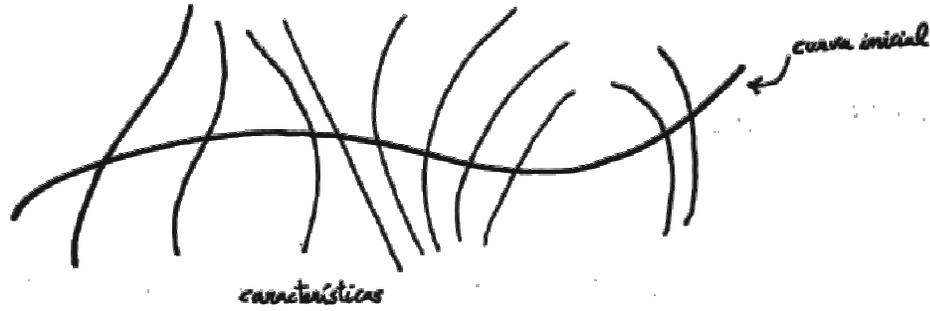


Figura A.1: Curva inicial e curvas características

Como $(x(\tau), y(\tau))$ é uma curva característica, o lado direito da equação anterior é igual a

$$a(x(\tau), y(\tau))u_x(x(\tau), y(\tau)) + b(x(\tau), y(\tau))u_y(x(\tau), y(\tau)) \quad ,$$

que é igual, devido ao fato de u ser solução da EDP em (A.1), a

$$c(x(\tau), y(\tau))u(x(\tau), y(\tau)) + d(x(\tau), y(\tau)) \quad . \quad (\text{A.2})$$

Vemos então que $u^\natural(\tau) = u(x(\tau), y(\tau))$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{du^\natural}{d\tau} = g(\tau) \quad , \quad (\text{A.3})$$

onde $g(\tau)$ denota a função dada em (A.2). Isto implica que o valor de u fica determinado ao longo de toda uma curva característica, desde que se conheça o valor de u em apenas um ponto da curva. Para tanto, basta se resolver um problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária em (A.3).

Podemos levar esta idéia mais adiante e obter um método que nos permitirá obter explicitamente a solução u . Suponhamos que a curva inicial seja cortada não-tangencialmente em todos seus pontos por curvas características (veja a Figura A.1). Esta hipótese é expressa pela inequação:

$$\gamma_1'(s)b(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \neq \gamma_2'(s)a(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \quad , \quad \text{para todo } s \quad . \quad (\text{A.4})$$

De fato, (A.4) significa que o vetor tangente à curva inicial é não-paralelo ao campo vetorial (a, b) em todos os pontos da curva $\gamma(s)$.

As curvas características que cortam γ podem ser obtidas resolvendo-se a família de problemas de valor inicial abaixo (com condição inicial dependendo do parâmetro s):

$$\begin{cases} x' = a(x, y) & x(0, s) = \gamma_1(s) \\ y' = b(x, y) & y(0, s) = \gamma_2(s) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

O valor de $u(\tau, s) = u(x(\tau, s), y(\tau, s))$ é então obtido resolvendo-se a família de problemas de valor inicial

$$\begin{cases} u'(\tau, s) = c(x(\tau, s), y(\tau, s))u + d(x(\tau, s), y(\tau, s)) \\ u(0, s) = u_0(s) \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

onde $u'(\tau, s)$ denota a derivada em relação a τ de $u(\tau, s)$, para cada s fixo. Invertendo a aplicação

$$(\tau, s) \longrightarrow (x(\tau, s), y(\tau, s)) \quad , \quad (\text{A.7})$$

obtemos (τ, s) como função de (x, y) . Substituindo esta função na solução $u(\tau, s)$ de (A.6), obtemos então a solução de (A.1) dada por

$$u(x, y) = u(\tau(x, y), s(x, y)) \quad (\text{A.8})$$

Que a aplicação em (A.7) pode, de fato, ser invertida, é consequência de (A.4) e do Teorema da Função Inversa.

Note que os argumentos que usamos até agora pressupõem a existência da solução de (A.1), que então, sob a hipótese (A.4), deve necessariamente ser dada por (A.8). Reciprocamente, sabe-se da teoria das equações diferenciais ordinárias [55] que as soluções de uma família de problemas de valor inicial, dependendo diferenciavelmente de um parâmetro, definem uma função derivável também em relação ao parâmetro. Este resultado, aplicado ao sistema formado por (A.5) e (A.6), permite demonstrar também a existência da solução de (A.1), dada por (A.8). O leitor interessado nos detalhes deve consultar [30] ou [57].

Exemplo 92 Resolvamos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + x^2 u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} .$$

Aqui a curva inicial é dada por $\gamma(s) = (s, 0)$ e o campo característico por $(x^2, 1)$. A condição (A.4) é então satisfeita. As curvas características são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 & x(0, s) = s \\ t' = 1 & t(0, s) = 0 \end{cases},$$

o que dá:

$$x(\tau, s) = -\frac{s}{s\tau + 1} \quad t(\tau, s) = \tau \quad .$$

Note que as curvas características neste exemplo são hipérbolas (desenhe figura). Podemos obter explicitamente τ e s em função de x e t , dando:

$$\tau = t \quad s = -\frac{x}{tx + 1} \quad . \quad (\text{A.9})$$

A equação (A.6) para este exemplo resume-se a

$$\frac{du}{d\tau} = 0 \quad u(0, s) = u_0(s) \quad ,$$

que é resolvida por

$$u(\tau, s) = u_0(s) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.9) em (A.10), obtemos:

$$u(x, t) = u_0\left(-\frac{x}{xt + 1}\right) \quad .$$

(Verifique diretamente por substituição que a expressão acima define, de fato, uma solução do problema.)

Exemplo 93 Dada uma função *homogênea* de grau n , isto é, uma função u satisfazendo a equação

$$u(tx, ty) = t^n u(x, y) \quad , \quad \text{para todo } x, y, t,$$

é fácil ver que ela satisfaz a equação diferencial parcial em (A.11), conhecida como a *equação de Euler para funções homogêneas*. Resolvendo um problema de Cauchy com dado inicial sobre um círculo centrado na origem, verificaremos que toda função que satisfaz a equação de Euler é necessariamente homogênea.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = nu \\ u(\cos s, \sen s) = u_0(s) \end{cases} \quad , \quad (\text{A.11})$$

onde u_0 é periódica de período 2π . Os vetores característicos (x, y) são perpendiculares à curva inicial para cada s . As curvas características podem ser obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} x' = x & x(0, s) = \cos s \\ y' = y & y(0, s) = \sen s \end{cases} \quad ,$$

de onde obtemos

$$x(\tau, s) = \cos s e^\tau \quad y(\tau, s) = \operatorname{sen} s e^\tau \quad . \quad (\text{A.12})$$

Observe que as curvas características aqui são semi-retas radiais, para cada valor de s .

A equação para u fica

$$\frac{du}{d\tau} = nu \quad u(0, s) = u_0(s) ,$$

cuja solução é:

$$u(\tau, s) = u_0(s)e^{n\tau} \quad .$$

De (A.12), concluímos que s é igual ao ângulo θ das coordenadas polares do ponto (x, y) e que $e^\tau = \sqrt{x^2 + y^2} = r$. A solução de (A.11) é mais facilmente descrita, então, em coordenadas polares:

$$u(r, \theta) = u_0(\theta)r^n \quad ,$$

que é claramente uma função homogênea, como queríamos.

Maior número de variáveis independentes

Os argumentos que utilizamos para resolver o problema (A.1) também se aplicam a equações em \mathbb{R}^n , do tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})u_{x_i} = b(\mathbf{x})u + c(\mathbf{x}) \quad ,$$

as curvas características sendo as soluções de

$$x'_i = a_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad .$$

O problema de Cauchy é posto prescrevendo-se o valor de u sobre uma hipersuperfície (superfície parametrizada por $n - 1$ parâmetros).

A condição análoga a (A.4) é o vetor característico (a_1, \dots, a_n) ser não-tangente à superfície inicial em cada ponto. Por exemplo, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + a(x, y, t)u_x + b(x, y, t)u_y = c(x, y, t)u + d(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

satisfaz esta condição, pois o vetor característico $(a, b, 1)$ nunca é tangente à hipersuperfície inicial que é o plano $t = 0$ (parametrizado por $(s, r, 0)$). As curvas características são dadas pelas soluções de

$$\begin{cases} x' = a(x, y, t) & x(0, s, r) = s \\ y' = b(x, y, t) & y(0, s, r) = r \\ t' = 1 & t(0, s, r) = 0 \end{cases} ,$$

e a equação para u se escreve como

$$u' = c(x, y, t)u + d(x, y, t) \quad u(0, s, r) = u_0(s, r) \quad .$$

Apêndice B

A Equação do Calor

Iremos delinear as etapas que devem ser levadas a cabo na verificação que a função u definida por $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e,

$$u(\mathbf{x}, t) = (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}\right)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (\text{B.1})$$

é solução clássica do PVI para a equação do calor em \mathbb{R}^m :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{em } \mathbb{R}^m \times (0, \infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{em } \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

onde f pertence a $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^m)$.

Definição 94 *Uma função u é solução clássica do PVI para a equação do calor se satisfaz a condição de regularidade,*

$$u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^m \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m \times (0, \infty)),$$

e satisfaz (B.2) pontualmente.¹

Definimos o *núcleo do calor* em \mathbb{R}^m :

$$K_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}.$$

¹Notamos que se $v(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $t > 0$ e $v(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ então v satisfaz o PVI (B.2). Não é contudo solução clássica pois a condição de regularidade não é satisfeita, o que é afortunado, uma vez que v não reflete o comportamento físico da condução do calor.

Repare que, para $t > 0$, podemos escrever u definido em (B.1), fazendo a *convolução* do núcleo do calor com a condição inicial f ,

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^m} K_m(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (\text{B.3})$$

Evidentemente, as três condições necessárias para que u seja solução clássica do PVI são que u satisfaça (a) a equação de evolução, (b) a condição inicial e (c) a condição de regularidade. Verificação da condição a é proposta no próximo exercício.

Exercício 95 Mostre que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) K_m(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^m \times (0, \infty).$$

e use este resultado para mostrar que u definido em (B.2) satisfaz a equação de evolução do calor².

E' imediatamente verificado que condição b é satisfeita. A noção de sequência de Dirac, desenvolvida no Capítulo 7, é útil na verificação que

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m \times [0, \infty)),$$

que é parte da condição de regularidade. Veja os exercícios subsequentes.

Exercício 96 Mostre que o núcleo do calor é uma sequência de Dirac (em t), isto é,³

$$K_m(\cdot, t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad t \rightarrow 0.$$

²Veja nota de rodapé à página 26.

³Dica: Use Exemplo 71 mas primeiramente verifique que:

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} = \pi^{m/2}.$$

Para demonstrar este fato em geral note que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x_1|^2} dx_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x_m|^2} dx_m \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|^2} dz \right)^m. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Além disso, lado esquerdo de (B.4) é fácil de calcular se $n = 2$ desde que usemos coordenadas polares em \mathbb{R}^2 .

Exercício 97 Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.5})$$

onde u é dado em (B.1). Esta é uma condição necessária porém não suficiente para u ser contínua em $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$. Dê um contra-exemplo.

(Dica: função zero + translação).

Exercício 98 Seja $v = v(\mathbf{x}, t) \in C^0(\mathbb{R}^m \times (0, \infty))$ e assuma que

$$v(\cdot, t) \xrightarrow{\text{unif}} g(\cdot), \text{ quando } t \rightarrow 0$$

onde $g \in C^0(\mathbb{R}^m)$. Mostre que a função

$$w(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} v(\mathbf{x}, t), & t > 0 \\ g(\mathbf{x}), & t = 0 \end{cases}$$

é contínua.

Se a convergência em (B.5) for uniforme, então por este último exercício, termina-se a demonstração que u , dado em (B.1), é solução de (B.2). Analisando-se, com cuidado, a prova do Teorema 72, é possível adaptá-la ao limite em (B.5), para concluir que a convergência em (B.5) é uniforme. Faça isto. (Pode, ao invés, consultar [21]).

Finalmente observamos que, fixada a condição inicial f , a função u dada pela fórmula B.1 é a única solução no sentido da Definição 94 do PVI para a equação do calor. (Consulte [30, Capítulo 7]).

Exercício 99 Mostre que se f for uma função limitada, então $u(\mathbf{x}, t)$ dada por (B.3) tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente em \mathbf{x} .

Referências Bibliográficas

- [1] ARFKEN, G (1970) - Mathematical Methods for Physicists, 2nd. edition, Academic Press.
- [2] ÁVILA, G. (1990) - Variáveis Complexas e Aplicações, LTC Editora.
- [3] BARTLE, R. (1976) - The Elements of Real Analysis, 2nd. edition, John Willey & Sons.
- [4] BARTLE, R. (1966) - The Elements of Integraton, John Wiley & Sons.
- [5] BEALE, J. & MAJDA, A. (1982) - *Vortex methods I: convergence in three dimensions*, Math. Comp. **39** (29-44).
- [6] BENDER, C. & ORSZAG S. (1978) - Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book Company.
- [7] BENSOUSSAN, A. & LIONS, J.L. & PAPANICOLAU, G. (1978) - Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam.
- [8] BOLDRINI, COSTA, FIGUEIREDO & WETZLER (1984) - Álgebra Linear, Harbra.
- [9] BRAUN, M. (1983) - Differential Equations and Their Applications, 3rd edition, Spriger-Verlag.
- [10] BURGERS, J. (1948) - *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. Appl. Mech. **1**, (171-199).
- [11] CHORIN, A. (1982) - *The evolution of a turbulent vortex*, Comm. Math. Phys. **83**, (517-535).
- [12] CHORIN, A. (1982) - *Estimates of intermittency, spectra and blow-up in developed turbulence*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (853-866).

- [13] CHORIN, A. & MARSDEN, J. (1979) - A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag.
- [14] DiPERNA, R. & MAJDA, A. (1988) - *Reduced Hausdorff dimension and concentration cancellation for two-dimensional incompressible flow*, J. Amer. Math. Soc. **1**, 59-95.
- [15] DiPERNA, R. & MAJDA, A. (1987) - *Oscillations and concentrations in weak solutions of incompressible fluid equations*, Comm. Math. Phys. **108**, 667-689.
- [16] DiPERNA, R. & MAJDA, A. (1987) - *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow*, Comm. Pure Appl. Math. **40**, 301-345.
- [17] DOOLEN, ECKE, HOLM & STEINBERG, *ed.* (1989) - Advances in Fluid Turbulence (*Proceedings*), Physica D **37**, 1-3, North Holland.
- [18] EVANS, L.C. (1990) - Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations, Conference Board of Mathematical Sciences, AMS, Providence, Rhode Island.
- [19] FEYNMAN, R. (1965) - The Character of Physical Law, M.I.T. Press.
- [20] FOX, R. & McDONALD, A. (1988) - Uma Introdução à Mecânica dos Fluidos, Editora Guanabara.
- [21] FIGUEIREDO, D.G. (1977) - Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, IMPA (Projeto Euclides).
- [22] FOLLAND, G. (1985) - Introduction to Real Analysis, John Wiley & Sons.
- [23] FRIEDRICHS, K.O. (1955) - *Asymptotic phenomena in mathematical-physics*, Bull. Amer. Math. Soc. vol **61**, **6** (485-504).
- [24] GUIDORIZZI, H. (1988) - Um Curso de Cálculo, LTC Editora.
- [25] GURTIN, M. & MARTINS L. (1976) - *Cauchy's theorem in classical physics*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (305-324).
- [26] GUSTAFSON, K. (1987) - Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, 2nd, edition, John Wiley and Sons.
- [27] HOUNIE, J. (1979) - Teoria Elementar das Distribuições, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, CNPq.

- [28] HUGHES, T. & MARSDEN, J. (1976) - A Short Course in Fluid Mechanics, Publish or Perish.
- [29] IÓRIO JR., R & IÓRIO, V. (1988) - Equações Diferenciais Parciais: uma Introdução, IMPA (Projeto Euclides).
- [30] JOHN, F. (1982) - Partial Differential Equations, Springer-Verlag.
- [31] KEVORKIAN, J. & COLE, J. (1981) - Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer-Verlag.
- [32] KREISS, H. & LORENZ, J. (1989) - Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations, Academic-Press.
- [33] LADYZHENSKAYA, O. (1969) - The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordan and Breach.
- [34] LANDAU, L. & LIFSHITZ, E. (1959)- Fluid Mechanics, Pergamon Press.
- [35] LAX, P. (1971) - Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, SIAM.
- [36] LAX, P. (1972) - *The formation and decay of shock waves*, Am. Math. Monthly, March, (227-241).
- [37] LEONARD, A. (1985) - Ann. Rev. Fluid Mech. **17** (529-559).
- [38] LEONARD, A. (1980) - J. Comput. Phys. **37** (289-335).
- [39] LIMA, E.L. (1970) - Análise no Espaço \mathbb{R}^n , Edgard Blücher.
- [40] LUGT, H.J. (1983) - Vortex Flow in Nature and Technology, John Wiley & Sons.
- [41] MAJDA, A. (1986) - *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (S187-S220).
- [42] MAJDA, A. (1987) - *Vortex Dynamics: Numerical Analysis, Scientific Computing, and Mathematical Theory*, Proceedings of the first international conference on industrial and applied mathematics (I.C.I.A.M.).
- [43] MEYER (1982) - Introduction to Mathematical Fluid Dynamics, Dover Publications.
- [44] MOURA NETO, F. (1990) - *Defect dynamics in a dissipative system*, a aparecer no SIAM, J. Applied Math.

- [45] NAYFEH, A. (1973) - *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc.
- [46] NEU, J.C. (1984) - *The dynamics of stretched vortices*, J. Fluid Mech. **143** (253-276).
- [47] NEU, J.C. (1990) - *Vortex dynamics of the nonlinear wave equation*, Physica D **43** (407-420).
- [48] NEU, J.C. (1990) - *Kinks and the minimal surface equation in Minkowski space*, Physica D **43** (421-434).
- [49] PALIS, J. (1989) - *Sistemas caóticos ou turbulentos: atratores e bifurcações homoclínicas*, Matemática Universitária, **9/10**, SBM.
- [50] PATIÑO, J. (1987) - *Introdução à Teoria da Elasticidade*, 16^o Colóquio Brasileiro de Matemática, CNPq.
- [51] REED, M. & SIMON, B. (1975) - *Methods of Modern Mathematical-Physics*, vol 1, Academic-Press.
- [52] RUDIN, W. (1976) - *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill.
- [53] SALDANHA, N. & TOMEI, C. (1989) - *Problema 25*, Matemática Universitária **9/10**, SBM.
- [54] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1980) - *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, **127** Springer-Verlag, Berlin.
- [55] SOTOMAYOR, J. (1979) - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA (Projeto Euclides).
- [56] SPIVAK, M. (1968) - *Calculus on Manifolds*, The Benjamin/Cummings Publishing Company.
- [57] SPIVAK, M. (1979) - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol 5, Publish or Perish.
- [58] STEIN, E. (1970) - *Singular Integrals and the Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press.
- [59] TARTAR, L. (1983) - *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*, Systems of Nonlinear PDE (J. Ball, ed.), Reidel, Dordrecht.

- [60] TEMAM, R. (1978) - Navier-Stokes Equation, North-Holland, Amsterdam.
- [61] VAN DYKE, M. (1982) - An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford, California.
- [62] VAN DYKE, M. (1964) - Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York.
- [63] WARNER, F. (1983) - Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag.
- [64] WHITHAM, G (1974) - Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons.