A PROVA VAZADA DO ENEM: LADO B

ANTÔNIO LUIZ PEREIRA E SEVERINO TOSCANO MELO

Teve grande repercussão o cancelamento da prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM 2009) que deveria ter sido aplicada nos dias 03 e 04 de outubro. Foram bastante discutidos na imprensa os problemas de organização e logística envolvidos no processo. Em nosso entendimento, contudo, relativamente pouco foi dito sobre a adequação e qualidade da prova em si. Queremos aqui contribuir com uma avaliação da prova específica de "Matemática e suas Tecnologias", disponível para "download" na rede.

Há muitas questões gerais que precisam ser melhor debatidas sobre este exame. Veja-se, por exemplo, em [4], uma discussão sobre a ênfase dada a "habilidades e competências" em contraposição a conhecimento acadêmico e as dificuldades inerentes à formulação de questões "contextualizadas". Outro aspecto discutível é se um tal exame deve ou não substituir, total ou parcialmente, os vestibulares. Não iremos tomar parte desses debates neste artigo. Vamos nos ater apenas à parte técnica da prova.

Não há dúvida de que a prova tem méritos inegáveis: propõe algumas questões pertinentes e interessantes e procura destacar tópicos importantes dos assuntos tratados. Porém, mesmo esquecendo eventuais objeções conceituais, ela também apresenta falhas inaceitáveis para um teste de tal abrangência e importância, e até surpreendentes em vista do histórico de exames anteriores.

Para começar, caso a prova tivesse sido aplicada, ao menos duas questões teriam que ser anuladas: as de número 79 e 86. Como veremos nas duas últimas seções deste artigo, as respostas corretas simplesmente não aparecem entre as alternativas apresentadas. Erros desse tipo não são novidade. Entretanto, os ocorridos nesta prova são um tanto grosseiros e poderiam ser facilmente evitados com uma revisão mais cuidadosa. Contudo, o que nos preocupa mais é a tendência, evidente em diversos pontos da prova, de não se enunciar claramente as perguntas. Os enunciados são vagos e imprecisos e são frequentes os erros gramaticais. Às vezes o que se diz não é o o que se quer, e é preciso uma certa malícia para descobrir a verdadeira intenção dos examinadores. Acreditamos que tal desleixo com a linguagem é extremamente deseducativo. Como esperar que os alunos aprendam a se expressar com rigor se os examinadores do ENEM não o fazem? Não seria a capacidade de se expressar com precisão uma das habilidades desejadas de um egresso do Ensino Médio?

Segue logo abaixo uma lista incompleta de exemplos de questões mal formuladas. Na seção seguinte, analisaremos com algum detalhe dois casos que nos pareceram mais graves e ilustrativos.

(1) A Questão 46 traz gráficos que indicam o aumento de preços de cinco itens que compõem a inflação em quatro regiões metropolitanas do país. Pergunta-se qual item foi "determinante" para a inflação. Nas quatro regiões, um mesmo item se destaca como tendo tido um maior aumento. Mas não se informa o peso relativo de cada item componente da inflação. Sem este dado, a questão é insolúvel. Aparentemente, espera-se que o aluno suponha que todos os itens têm o mesmo peso. É irônico que, para resolver uma questão "contextualizada", o aluno seja obrigado a fazer uma suposição totalmente fora da realidade. Além disso, a formulação da pergunta não é das mais felizes. Afinal, todos os fatores são determinantes para a inflação. O que se quer saber é qual item deu a maior contribuição para a inflação. Uma prova do ENEM deveria usar uma linguagem mais precisa do que a dos telejornais.

(2) O enunciado da Questão 51 informa que o objetivo de um remédio é aumentar a "quantidade" de uma substância no organismo e que, depois de alcançado esse objetivo, a quantidade deve voltar ao normal. Pede-se que o aluno escolha um gráfico que melhor represente essa quantidade como função do tempo. Há duas

alternativas (A e D) em que a quantidade parte de um valor positivo, cresce, e depois decresce e se estabiliza em um valor positivo. Numa delas o valor final é menor que o inicial e na outra é igual. Para descartar uma das duas, espera-se que o aluno saiba que, antes do início do tratamento, a quantidade da substância no organismo era a normal. Esta seria uma suposição razoável, mas também seria razoável supor que o remédio foi ministrado para suprir uma baixa concentração da substância, que voltaria a um patamar mais alto após o final do tratamento.

(3) Informa-se, na Questão 66, que a coleta de latinhas de alumínio movimentou a importância de 523 milhões em um ano, gerando renda para 180 mil trabalhadores. Diz-se também que, em muitos casos, essa renda serve como complementação ao orçamento familiar. Depois se pergunta qual foi a renda média mensal dos trabalhadores envolvidos na atividade. Com base nessas informações, o problema é insolúvel, pois não se sabe nada sobre o restante da renda dos trabalhadores que não se dedicam exclusivamente à coleta de latinhas. Para resolver a questão, o aluno é obrigado a ignorar parte da informação dada no enunciado e supor que toda a renda mensal dos trabalhadores envolvidos provém da coleta de latinhas.

(4) Fazem parte da Questão 69 uma foto e um desenho. No enunciado, afirma-se que d representa a medida, na fotografia, do queixo ao alto da cabeça de uma turista e que d' representa a medida, também na fotografia, do queixo ao alto da cabeça da esfinge de Gizé. Entretanto no desenho, que sugere o uso de semelhança de triângulos para se estimar a distância da câmara fotográfica à esfinge, d e d' significam grandezas claramente diferentes daquelas definidas no texto, embora proporcionais. Para chegar à resposta certa, o aluno tem que entender que o d' que aparece nas alternativas é o d' da figura, e não o texto.

(5) Afirma-se, na Questão 84, que uma fonte é "formada por dois cilindros". Logo após, fala-se em "encher essa fonte e o segundo cilindro". Ou seja, numa hora a tal fonte é formada por dois cilindros, logo depois por um só.

1. Problemas contextualizados confusos e artificiais

Analisamos nesta seção duas questões contextualizadas na Economia. Nos dois casos, deve-se encontrar uma função que dê o lucro, conhecidos o custo de produção e o valor de venda do produto. Parece uma ideia muito simples e natural, mas os redatores foram capazes de gerar enunciados extremamente confusos. Não se sabe ao certo o que eles querem dizer, mas, com alguma boa vontade, é possível adivinhar qual conta deve ser feita.

Questão 83. *A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é*

(A) 10 (B) 30 (C) 58 (D) 116 (E) 232

Qualquer aluno bem treinado para resolver este tipo de teste perceberá o que se espera dele: que subtraia a primeira função da segunda e ache o máximo. Com uma conta simples, ele descobrirá que o vértice da parábola $y = -3x^2 + 180x - 348$ tem abscissa $x = 30$, marcará a alternativa (B) e partirá satisfeito para a próxima questão.

Um aluno mais inclinado a ler textos criticamente talvez gaste um bom tempo decifrando o obscuro enunciado dessa questão. Em primeiro lugar, ele notará que o x é usado com pelo menos dois significados distintos: o nome do produto e a variável das duas funções dadas. O primeiro desses significados está claramente enunciado, mas não está dito em lugar nenhum que variável x é essa que aparece nas funções $3x^2 + 232$ e $180x - 116$. Com um pouco de bom senso, ele deverá supor que x denota, em cada função, respectivamente, o número de unidades fabricadas ou vendidas do produto. Corrigindo ambiguidades e omissões, ele provavelmente relerá, mentalmente, o enunciado da questão da seguinte maneira:

Questão 83′. *A empresa WQTU Cosméticos vende um determinado produto P, com custo de fabricação por unidade dado por $3x^2 + 232$, e valor de venda expresso pela função $180x -$*

116*, sendo x o número de unidades fabricadas ou vendidas. A empresa vendeu 10 unidades do produto P e deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é* (alternativas).

Melhorou um pouco, mas ainda não está claro. O que quer dizer "custo de fabricação por unidade"? A interpretação mais ao pé da letra seria que o custo de fabricação por unidade é o custo total da produção dividido pelo número de unidades. Daí o custo total de x unidades seria dado por x multiplicado por $3x^2 + 232$, ou seja, $3x^3 + 232x$. Se subtrairmos do valor de venda, teremos ainda uma função cúbica. Como não se ensina a maximizar funções cúbicas no Ensino Médio, chegamos à conclusão de que os examinadores quiseram dizer (mas não disseram) que o custo total para fabricar x unidades do produto é $3x^2 + 232$.

E o que quer dizer "o valor de venda é $180x - 116$"? Não está dito claramente, mas é razoável entender que $180x - 116$ seja o valor total obtido com a venda de x unidades do produto.

Há ainda um outro problema com este enunciado. Pede-se o valor máximo de x que maximize o lucro. Esta pergunta só faria sentido se o lucro máximo ocorresse em mais de um valor de x. Convenhamos que esta não é uma ocorrência típica em problemas de otimização que possam ser resolvidos com as ferramentas à mão de um estudante do Ensino Médio. Devemos então entender que os examinadores queriam pedir apenas a quantidade de unidades a serem vendidas para maximizar o lucro.

Em resumo, chegaremos a um problema factível e com resposta dada por uma das alternativas da questão, se substituirmos o enunciado original por:

Questão 83$''$. *A empresa WQTU Cosméticos vende um determinado produto P. O custo de fabricação de x unidades é dado por $3x^2 + 232$, e o valor de venda de x unidades é dado por $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto P e deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção desse lucro máximo é* (alternativas).

Se tivesse sido este o enunciado da questão, teríamos ainda uma crítica. Como o custo de produção de x é dado por $3x^2 + 232$, o custo por unidade para fabricar x unidades é dado por $3x + 232/x$, que é uma função crescente para $x > 9$. Ou seja, no mundo imaginário desta questão contextualizada, não existe a tal da economia de escala.

Há uma outra questão com falhas semelhantes:

Questão 88. *A empresa SWK produz um determinado produto x, cujo custo de fabricação é dado pela equação de uma reta crescente, com inclinação dois e de variável x. Se não tivermos nenhum produto produzido, a despesa fixa é de sete reais e a função de venda de cada unidade x é dada por $-2x^2 + 229,76x - 441,84$. Tendo em vista uma crise financeira, a empresa faz algumas demissões. Com isso, caiu em 12% o custo da produção de cada unidade produzida. Nessas condições, a função lucro da empresa pode ser expressa como* (alternativas).

Além da impropriedade de afirmar que "o custo de fabricação é dado pela equação etc.", comete-se aqui a desagradável imprecisão de chamar uma reta de crescente. O que pode ser crescente é uma função cujo gráfico é uma reta, mas nunca uma reta em si. Será que isto é só desleixo, ou os redatores da prova de fato não valorizam precisão de linguagem em Matemática?

A letra x tem, desta vez, três significados: é o nome do produto, é a "variável" de uma função (cabe ao aluno supor o que esta variável representa) e é também como se chama uma unidade genérica do produto. Dá para adivinhar que o que querem é que o aluno subtraia da função $-2x^2 + 229,76x - 441,84$ a "reta crescente" $2x + 7$ multiplicada por 0,88. De fato, o resultado desta conta aparece na alternativa (A). Fica para o leitor o exercício de redigir uma questão precisa e coerente que tenha como solução o cálculo que os examinadores queriam que se fizesse.

2. Um problema de probabilidade sem a alternativa correta

Nesta seção comentamos sobre uma questão bem interessante de probabilidade. O contexto proposto é um tanto artificial mas o jogo descrito faz sentido, a pergunta é natural, e a solução não é fácil nem difícil demais. A resposta correta, entretanto, não aparece entre as cinco alternativas dadas.

Questão 79. *Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se um real de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a tereceira fosse 5, ele ganharia dois reais de desconto. Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?*

(A) $\dfrac{1}{24}$ (B) $\dfrac{3}{24}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{1}{2}$

Despido de sua contextualização, o problema pode ser formulado da seguinte maneira: "Escolhendo-se ao acaso (com igual probabilidade) uma, entre todas as permutações de 4 objetos distintos, qual é a probabilidade de que, depois de permutados, nenhum objeto permaneça em sua posição original?"

Uma permutação de n objetos (distintos) com a propriedade acima descrita é denominada uma *permutação caótica*, ou *desarranjo*. Para resolver o problema proposto basta determinar a quantidade N de permutações caóticas de 4 objetos e a quantidade total T dessas permutações. A probabilidade procurada será então o quociente N/T (número de casos 'favoráveis' dividido pelo número total de casos).

A contagem do número de permutações de n objetos (ou elementos) é um dos problemas básicos de combinatória elementar; ele é igual a $n(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ e usualmente denotado por $n!$. O problema de contagem das permutações caóticas é menos conhecido e consideravelmente mais difícil. Para os interessados no assunto, recomendamos o texto [3] e os artigos [1] e [2], publicados na Revista do Professor de Matemática, nos quais o tema foi também tratado de forma bastante completa e aplicado a um problema bem mais interessante.

Entretanto, para n suficientemente pequeno, essa contagem pode ser feita simplesmente por enumeração exaustiva.

Na questão, temos $n = 4$, e queremos saber de quantas maneiras podemos reoordenar os algarismos $1, 2, 5$ e 0 de modo que nenhum deles permaneça na posição original. Listemos primeiro as ordenações nas quais o algarismos 1 figura na segunda posição. Nesse caso, se o 2 for para a primeira posição, sobram os números 5 e 0 que devem então permutar suas posições. A nova ordenação será $(2, 1, 0, 5)$. Suponhamos agora que 2 vá para a posição 3. Sobram os algarismos 5 e 0 e as posições 1 e 4. Como o 0 não pode continuar na posição 4, a nova ordenação será $(0, 1, 2, 5)$. Se o 2 for para a posição 4, segue de maneira análoga que a nova ordenação tem que ser $(5, 1, 0, 2)$. Portanto, temos exatamente 3 permutações caóticas levando 1 para a segunda posição: $(2, 1, 0, 5)$, $(0, 1, 2, 5)$ e $(5, 1, 0, 2)$.

As mesmas considerações permitem encontrar exatamente 3 permutações caóticas nas quais 1 ocupa a posição 3 e mais 3 nas quais o 1 ocupa a posição 4, num total de 9 permutações. São elas: $(2, 1, 0, 5)$, $(0, 1, 2, 5)$, $(5, 1, 0, 2)$, $(5, 0, 1, 2)$, $(0, 5, 1, 2)$, $(2, 0, 1, 5)$, $(0, 5, 2, 1)$, $(5, 0, 2, 1)$ e $(2, 5, 0, 1)$.

Logo, a probabilidade de o consumidor não ganhar desconto é $9/24 = 3/8$.

3. Um problema sobre interseções máxima e mínima de conjuntos

Questão 86. *Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelos homens do sec. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo. Se a pesquisa foi realizada com* 300 *mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao "shopping" e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é*

(A) inferior a 80.
(B) superior a 80 e inferior a 100.
(C) superior a 100 e inferior a 120.
(D) superior a 120 e inferior a 140.
(E) superior a 140.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM

72 % das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping No entanto apenas 39 % dos homens disseram achar a atividade insuportável	65 % pensam que os homens preferem que mulheres que façam todas as tarefas de casa No entanto, 84 % deles disseram acreditar que tarefas devem ser divididas entre o casal

Seja A o conjunto das mulheres que acredita que os homens odeiam ir ao "shopping" e B o conjunto das mulheres que pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa. Denotemos por a, b e x o número de elementos de A, B e $A \cap B$, respectivamente. Vamos determinar o maior e o menor valor possível para x. Como $A \cap B \subset B$, então $x \leq b$ e $x = b$ se e somente se $A \cap B = B$, ou seja $B \subset A$ (usamos que o número de elementos de A é maior que o de B, logo é possível que $A \cap B$ seja igual a B, mas não é possível que seja igual a A). Decorre então que o maior valor possível para x é o número de elementos de B, ou seja $(65/100) \cdot 300 = 195$.

O problema de encontrar o menor valor possível foi discutido *para o caso de três* conjuntos em [5]. No presente caso, de dois conjuntos, basta lembrar a propriedade básica $x = a+b-y$, sendo y o número de elementos do conjunto união $A \cup B$. O valor de x será mínimo quando y for máximo, ou seja, quando $A \cup B$ for o conjunto de todas as mulheres pesquisadas. Dos dados do problema, temos $x = 300 \cdot (65/100 + 72/100) - 300 = 111$. Assim, podemos *assegurar*, a partir dos dados do problema, que a quantidade pedida é maior ou igual a 111 e menor ou igual a 195. O usual, em uma questão de múltipla como essa, é que a alternativa correta seja uma afirmação que *necessariamente* decorra dos dados. Por esta interpretação, nenhuma das alternativas apresentadas está correta. Todas as altenativas consideram possíveis resultados fora do intervalo de 111 a 195.

Uma outra interpretação (não muito natural) do enunciado seria que se pede uma alternativa que não seja *incompatível* com os dados ou ainda, que não seja *necessariamente* falsa ou que seja *possivelmente* verdadeira. Por esta interpretação não-convencional, a alternativa (C), por exemplo seria aceitável: *pode* ocorrer que a quantidade esteja entre 100 e 120 (desde que esteja também acima de 110), enquanto a alternativa (A) estaria excluída: a quantidade *não pode* ser menor do que 80. Entretanto, mesmo adotando essa interpretação, não se conseguiria "salvar" a questão. Em vez de nenhuma haveria agora três alternativas corretas: (C),(D) e (E).

Referências

[1] José P. Carneiro, *O problema do amigo oculto*, Revista do Professor de Matemática, **28** .
[2] Carlos Gustavo T. A. Moreira, *Amigo Oculto*, Revista do Professor de Matemática, **15**.
[3] Augusto C. O Morgado, João B. P. de Carvalho, Paulo C. P. de Carvalho e Pedro Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, IMPA, 1991.
[4] Antônio L. Pereira, Deborah M. Raphael. ENEM. Revista do Professor de Matemática, **50** ..
[5] Seção 'O Leitor Pergunta', Revista do Professor de Matemática, **64**.

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo,
Rua do Matão 1010, 05508-090 São Paulo SP.
Emails: alpereir@ime.usp.br, toscano@ime.usp.br.