MAT 317 - Topologia

Bacharelado em Matemática

3^a Prova - 24 de junho de 2004

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Questão 1 (2 pontos) Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(1) Toda sequência em um espaço caótico converge.

(2) Nenhuma sequência em um espaço discreto converge.

(3) Qualquer espaço caótico satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(4) Nenhum espaço discreto satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Questão 2 (2,5 pontos) Seja X o conjunto das funções reais e contínuas definidas no intervalo $[a, b]$. Munindo-se X da topologia induzida pela norma $||f||_\infty = \sup |f|$ e $\mathbb{R}$ da topologia usual, decida se a aplicação

$$X \ni f \;\longmapsto\; \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

é contínua.

Questão 3 (2,5 pontos) Mostre que todo subconjunto fechado de um compacto é compacto.

Questão 4 (3 pontos) Seja M um espaço métrico e sejam $F_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, fechados de interior vazio.

(a) Prove por indução que existem bolas abertas B_n, $n \in \mathbb{N}$, de raio menor que $1/n$ e tais que, para todo n, tem-se $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n$ e $B_n \cap F_n = \emptyset$.

(b) Prove que os centros das bolas obtidas no item anterior formam uma sequência de Cauchy.

(c) Mostre que um espaço métrico completo não pode ser escrito como uma união enumerável de fechados de interior vazio.