MAT 317 - Topologia

Bacharelado em Matemática

2^a Prova - 27 de maio de 2004

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Podem tentar fazer todas as questões. Escolherei quatro delas de modo a maximizar a nota.

Questão 1 (2,5 pontos) Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(1) Um espaço topológico é discreto se as suas componentes conexas são os conjuntos unitários.

(2) Um espaço topológico é discreto somente se as suas componentes conexas são os conjuntos unitários.

(3) Todo conjunto unitário em um espaço de Hausdorff é fechado e conexo.

Solução: (1) Falsa. Contra-exemplo: $\mathbb{Q}$ com a topologia usual. De fato, suponha que X é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ contendo dois elementos distintos $a < b$. Se x é um irracional tal que $a < x < b$, então $(-\infty, x) \cap X \ni a$ e $(x, +\infty) \cap X \ni b$ são abertos disjuntos e não-vazios e sua união é igual a X. Logo X é desconexo. Provamos que todo conjunto com mais de um elemento é desconexo. Logo, toda componente conexa de $\mathbb{Q}$ tem apenas um elemento. E $\mathbb{Q}$ não é discreto, pois todo aberto não-vazio de $\mathbb{Q}$ contém todos os racionais de algum intervalo aberto; isto é, todo aberto de $\mathbb{Q}$ é infinito.

(2) Verdadeira. Seja S um subconjunto de um espaço discreto contendo dois pontos distintos a e b. Então $\{a\}$ e $S \setminus \{a\}$ são abertos não-vazios disjuntos de S cuja união é igual a S. Logo S não é conexo. Por outro lado, os conjuntos unitários sempre são conexos, em qualquer espaço topológico (veja item seguinte). Logo os conexos maximais (=componentes conexas) são os conjuntos unitários.

(3) Verdadeira. Seja X um espaço de Hausdorff e x um seu ponto. Dado $y \neq x$, existe aberto A tal que $y \in A$ e $x \notin A$ (bastava X ser T_1 para isso). Isto é $A \subseteq \{x\}^c$. Logo $\{x\}^c$ é aberto. Logo $\{x\}$ é fechado. Além disso, é impossível escrever um conjunto unitário como união disjunta de subconjuntos não-vazios. Logo, qualquer conjunto unitário em qualquer espaço topológico é conexo.

Questão 2 (2,5 pontos) Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações (com S e T denotando subconjuntos arbitrários de um espaço topológico X e barra denotando fecho):

(1) $\overline{S} \cap \overline{T} = \overline{S \cap T}$.

(2) $\overline{S} \cup \overline{T} = \overline{S \cup T}$.

(3) Se S e T são fechados em X, então $S \times T$ é fechado em $X \times X$.

Solução: (1) Falsa. Tome $X = \mathbb{R}$, $S = [0, 1)$ e $T = (1, 2]$. Então $\overline{S \cap T} = \emptyset$ (pois $S \cap T = \emptyset$). Mas $\overline{S} \cap \overline{T} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$.

(2) Verdadeira. $\overline{S} \cup \overline{T}$ é um fechado que contém $S \cup T$, logo contém $\overline{S \cup T}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{S}$, então, para todo aberto A contendo x, existe $y \in S \cap A \subset (S \cup T) \cap A$. Logo $x \in \overline{S \cup T}$. Analogamente prova-se que $\overline{T}$ está contido em $\overline{S \cup T}$. Daí vem que $\overline{S} \cup \overline{T} \subseteq \overline{S \cup T}$, como queríamos.

(3) Verdadeira. Provemos que $(S \times T)^c$ é aberto, se S e T forem fechados. Dado $(s, t) \in (S \times T)^c$, ou $s \notin S$, ou $t \notin T$. Suponhamos que $s \notin S$ (o argumento será análogo se $t \notin T$). Como S é fechado, existe aberto A contendo s e contido no complementar de S. Então $A \times X$ é aberto em $X \times X$, contém (s, t), e satisfaz $A \times X \subset S^c \times X \subset (S \times T)^c$. Isto prova que $(S \times T)^c$ é aberto, como queríamos.

Questão 3 (3 pontos) Dado X um espaço topológico de Hausdorff, defina $\Delta_X = \{(x,x); x \in X\}$.

(a) Mostre que Δ_X é fechado em $X \times X$.

(b) Se Y é um subespaço topológico de X, mostre que Δ_Y nem sempre é fechado em $X \times X$.

(c) Mostre que X é homeomorfo a Δ_X e conclua que X é conexo se e somente se Δ_X é conexo.

Solução: (a) Se $(x,y) \notin \Delta_X$, então existem abertos disjuntos $U \ni x$ e $V \ni y$. Daí, $U \times V$ é aberto e contém (x,y). Temos então $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$, pois, se existisse $z \in X$ tal que $(z,z) \in U \times V$, $U \cap V$ não seria vazio, pois conteria z. Logo $(U \times V) \subset (\Delta_X)^c$. Logo o complementar de Δ_X é aberto, como queríamos.

(b) Tome $X = \mathbb{R}$ e $Y = (0,1)$. Então $\Delta_Y = (0,1) \times (0,1)$ não é fechado em $\mathbb{R}^2$. De fato, $(0,0)$ não pertence a Δ_Y, mas pertence à fronteira de Δ_Y em $\mathbb{R}^2$, já que $(t,t) \in \Delta_Y$ para todo $t \in (0,1)$.

(c) É claro que $d : X \to \Delta_X$, $d(x) = (x,x)$, é uma bijeção. Se $U \subseteq X$ é aberto, então $d(U) = (U \times U) \cap \Delta_X$, que é aberto em Δ_X. Logo d^{-1} é contínua. Dado $x \in X$, seja A aberto em $X \times X$ contendo (x,x). Segue da definição de topologia produto que existem U e V abertos em X tais que $(x,x) \in U \times V \subseteq A$. O aberto $U' = U \cap V$ é tal que $x \in U'$ e $d(U') \subset A$. Isto prova que d é contínua em x, para todo $x \in X$. Logo d é contínua. Logo d é um homeomorfismo.

Vimos em sala que se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então X é conexo se e somente se Y é conexo. Em particular, como d é homeomorfismo, X é conexo se e somete se Δ_X é conexo.

Outro argumento: Como d é contínua, e funções contínuas mandam conexos em conexos, Δ_X será conexo se X o for. E como d^{-1} é contínua, X será conexo se Δ_X o for.

Questão 4 (2 pontos) Seja $X = \{$funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}\}$ com a topologia induzida pela família de seminormas $\{p_a;\, a > 0\}$, onde $p_a(f) = \sup\{|f(x)|;\, |x| \leq a\}$. Mostre que, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, $\{f \in X;\, f(t_0) \neq 0\}$ é aberto.

Solução: Seja $A = \{f \in X;\, f(t_0) \neq 0\}$, e seja $g \in A$. Então $|g(t_0)| = \delta > 0$.

Pela definição de topologia induzida por uma família de seminormas,

$$B = \{f \in X;\, p_a(f - g) < \delta\},$$

onde $a = |t_0|$, é aberto. Se $f \in B$, então

$$|\,|f(t_0)| - \delta| \;=\; |\,|f(t_0)| - |g(t_0)|\,| \;\leq |f(t_0) - g(t_0)| \;\leq\; p_a(f - g) \;<\; \delta.$$

Logo $\delta - |f(t_0)| \leq ||f(t_0)| - \delta| < \delta$, logo $|f(t_0)| > 0$, logo $f \in A$; o que prova que A é aberto.

Questão 5 (3,5 pontos) Seja $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e seja $\mathcal{B}$ a união da família de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ às famílias

$$\mathcal{B}_+ = \{(a, +\infty) \cup \{+\infty\}; a \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_- = \{(-\infty, a) \cup \{-\infty\}; a \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é base de uma topologia em X.

(b) Mostre que $\mathbb{R}$ é denso em X com essa topologia.

(c) Mostre que a topologia de $\mathbb{R}$ visto como subespaço topológico de X coinicide com a usual.

(d) Mostre que uma aplicação entre dois espaços topológicos é contínua se e somente se a imagem inversa de qualquer aberto básico é aberta.

(e) Mostre que a função $f : X \to [-1, +1]$ definida por $f(t) = t/\sqrt{1+t^2}$, se $t \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ e $f(-\infty) = -1$ é um homeomorfismo.

Solução: (a) Seja $\mathcal{I} = \{\text{intervalos abertos de } \mathbb{R}\}$, e seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_- \cup \mathcal{I}$. É óbvio que a união de todos os membros de $\mathcal{B}$ é igual a X. Logo, para provar que $\mathcal{B}$ é base de uma topologia, é suficiente mostrar que a intersecção de dois membros de $\mathcal{B}$ pertence a $\mathcal{B}$. É imediato verificar que:

$$A, B \in \mathcal{B}_+ \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}_+,$$

$$A, B \in \mathcal{B}_- \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}_-,$$

$$A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{I},$$

$$A \in \mathcal{B}_+, B \in \mathcal{B}_- \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{I}$$

(lembrando que o vazio é um intervalo aberto). Isso cobre todos os casos.

(b) Todo aberto que contenha $+\infty$ contém algum $B \in \mathcal{B}_+$, que tem interseção não vazia com $\mathbb{R}$. Todo aberto que contenha $-\infty$ contém algum $B \in \mathcal{B}_-$, que tem interseção não vazia com $\mathbb{R}$. Logo $\{+\infty, -\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Logo $\overline{\mathbb{R}} = X$, como queríamos.

(c) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto com a topologia relativa (ou induzida). Então existe A' aberto em X tal que $A = A' \cap \mathbb{R}$. Para todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \cap \mathbb{R} \subseteq A$. Mas $B \cap \mathbb{R}$ é um intervalo aberto (pelo que vimos no item anterior). Isto prova que A é aberto em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

Reciprocamente, todo aberto de $\mathbb{R}$ com a topologia usual é união de intervalos abertos, que são abertos em X. Logo, todo aberto de $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um aberto de X, e portanto, em particular, é um aberto relativo .

(d) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y. Se f for contínua, então a imagem inversa de qualquer aberto será aberta; em particular, a imagem inversa de qualquer aberto básico será aberta. Reciprocamente, suponha que a imagem inversa de todo aberto básico seja aberta, e seja A aberto em Y. Então $A = \cup A_\lambda$, cada A_λ sendo um aberto básico. Logo $f^{-1}(\cup A_\lambda) = \cup f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto, como queríamos.

(e) A restrição de f a $\mathbb{R}$ é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $(-1,+1)$. De fato, um cálculo elementar mostra que, dados $s \in (-1,+1)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$s = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Segue então que f é uma bijeção, com inversa dada por $g(s) = s/\sqrt{1-s^2}$, se $s \in (-1,+1)$, $g(+1) = +\infty$ e $g(-1) = -\infty$.

A coleção de todas as intersecções de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ com $[-1,+1]$ forma uma base da topologia de $[-1,+1]$. Os membros dessa base é que serão chamados abertos básicos de $[-1,+1]$ no que se segue. Os membros de $\mathcal{B}$ serão chamados abertos básicos de X. Adotaremos a seguinte notação:

$$(a,+\infty) \cup \{+\infty\} = (a,+\infty] \text{ e } (-\infty,a) \cup \{-\infty\} = [-\infty,a).$$

Para provar que f é um homeomorfismo, usando o item anterior, é suficiente provar que a imagem por f de qualquer aberto básico de X é um aberto básico de $[-1,+1]$; e que a imagem por g de qualquer aberto básico de $[-1,+1]$ é um aberto básico de X.

A restrição de f a $\mathbb{R}$ é uma função contínua e estritamente crescente, pois $f'(t) = (1+t^2)^{-3/2} > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue então do teorema do valor intermediário que a imagem por f de qualquer intervalo aberto (a,b), com a e b reais, é o intervalo $(f(a), f(b))$. Como $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +1$, $f((a,+\infty]) = (f(a),1]$, para todo $a \in \mathbb{R}$. (aqui também precisamos do teorema do valor intermediário para concluir que todo número entre $f(a)$ e 1 pertence a $f((a,+\infty]))$. Analogamente, segue de $\lim_{t\to-\infty} f(t) = -1$ que $f([-\infty,a)) = [-1, f(a))$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Provamos que $f(B)$ é um aberto básico de $[-1,+1]$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

Usando que $g = f^{-1}$, segue do parágrafo anterior que, para todos a e b em $(-1,+1)$, $g((a,b)) = (g(a), g(b))$, $g((a,+1]) = (g(a),+\infty])$ e $g([-1,a)) = [-\infty, g(a))$. Isto é, a imagem de qualquer aberto básico de $[-1,+1]$ por g é um aberto básico de X, como queríamos.