MAT 317 - Topologia

Bacharelado em Matemática

1^a Prova - 29 de abril de 2004

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

A primeira questão vale 3 pontos, as demais, 2,5. Na correção, serão escolhidas quatro delas de modo a maximizar a nota.

Questão 1 Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(1) O quadrado de uma métrica nunca é uma métrica.

(2) O quadrado de uma métrica sempre é uma métrica.

(3) Todo espaço métrico é homeomorfo a alguma bola aberta de algum espaço métrico.

Questão 2 Sejam E_1 e E_∞ os espaços métricos que são obtidos munindo-se $C_c(\mathbb{R})$ (o espaço vetorial de todas as funções reais, contínuas e de suporte compacto definidas em $\mathbb{R}$) das métricas $d_1(f,g) = \int |f(x) - g(x)|dx$ e $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$, respectivamente. Sejam B_1 e B_∞ as bolas abertas de raio unitário e centro na origem em E_1 e E_∞. Para cada real a, defina

$$f_a(x) = \frac{1}{4a}(|x+a| + |x-a| - 2|x|).$$

(a) Calcule $d_1(f_a, 0)$, $d_\infty(f_a, 0)$, $d_1(af_{\frac{1}{a}}, 0)$ e $d_\infty(af_{\frac{1}{a}}, 0)$ (vale argumentar usando gráficos).

(b) Ache o diâmetro de B_1 em E_∞ e o de B_∞ em E_1.

Questão 3 Dê exemplo de uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ que seja uma imersão isométrica se munirmos $\mathbb{R}^2$ da métrica induzida pela norma $||(x, y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$, mas não se dermos a $\mathbb{R}^2$ a métrica induzida pela norma euclideana.

Questão 4 Dada uma aplicação entre espaços topológicos $f : X \to Y$ e dado um ponto $a \in X$, defina o que significa f ser contínua em a. Prove que f é contínua (isto é, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X sempre que A é um aberto de Y) se e somente se f é contínua em todos os pontos de X.

Questão 5 Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow ((x,y) = (x',y') \text{ ou } y.y' > 0).$$

Mostre que $\mathbb{R}^2/\sim$ munido da topologia quociente não é um espaço T_1.