# MAT 0317 (TOPOLOGIA) – 1° SEMESTRE DE 2004

LISTA DE PROBLEMAS

Salvo menção em contrário, $M$ denota um espaço métrico arbitrário e $d$ sua métrica, e $X$ e $Y$ denotam espaços topológicos arbitrários.

## 1. Espaços métricos - definições iniciais

**Definição 1.** O *diâmetro* de $X \subseteq M$ é o supremo de $\{d(x,y);\, x,y \in X\}$.

`Problema` **1.** Qual o diâmetro de $\{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$ em $\mathbb{R}^2$ munido da métrica induzida pela norma $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$? Mesma pergunta para a norma $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|,|y|\}$. Dica: Use que $||(x,y)||_1 \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$

`Problema` **2.** Prove que $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$, para todos $x$, $y$ e $z$ em $M$.

`Problema` **3.** (a) Mostre que $d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, $d_2(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ e $d_3(x,y) = d(x,y)/(1+d(x,y))$ também são métricas em $M$.
(b) $d_4(x,y) = d(x,y)^2$ é sempre uma métrica? Há casos em que seja?

`Problema` **4.** (a) Seja $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\rho(x,x) = 0$ e $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(z,y)$, quaisquer que sejam $x$, $y$ e $z$ em $X$, e tal que $\rho(x,y) \neq 0$ se $x \neq y$. Mostre que $\rho$ é uma métrica em $X$.
(b) Seja $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\rho(x,x) = 0$ e $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, quaisquer que sejam $x$, $y$ e $z$ em $X$, e tal que $\rho(x,y) \neq 0$ se $x \neq y$. É necessariamente $\rho$ uma métrica em $X$?

`Problema` **5.** Mostre que todo espaço métrico finito é discreto.

**Definição 2.** Uma aplicação entre espaços métricos $f : M \to N$ é uma *imersão isométrica* se $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, $\forall x, y \in M$. Se, além disso, $f$ é sobrejetora, diz-se então que $f$ é uma *isometria*.

`Problema` **6.** Dê exemplo de uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ que seja uma imersão isométrica se munirmos $\mathbb{R}^2$ da métrica induzida pela norma $||\cdot||_1$, mas não se dermos a $\mathbb{R}^2$ a métrica induzida pela norma euclideana. Dica: Parametrize o bordo de um quadrante.

`Problema` **7.** (*O Plano Projetivo*) Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$, onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana (denotada $||\cdot||_2$ nas aulas de 2 e 4 de março). Defina então

$$\mathbb{P}^n = \{\,\{x,-x\};\, x \in \mathbb{S}^n\},$$

e $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x) = \{x, -x\}$.
(a) Mostre que $d(\pi(x), \pi(y)) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$ define uma métrica em $\mathbb{P}^n$.
(b) Mostre que, munindo-se $\mathbb{S}^n$ da métrica induzida pela distância euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\pi$ restrita a qualquer subconjunto de diâmetro menor que $\sqrt{2}$ é uma imersão isométrica.
Dica (para o item "a"): Prove e use que, (1) se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $\min\{a,c\} \leq \min\{b,d\}$; e que (2) $\min\{a+b, a+c\} = a + \min\{b,c\}$.

**Problema 8.** (a) Mostre que toda imersão isométrica de $\mathbb{R}$ em si próprio é da forma $x \mapsto \pm x + c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$
(b) Mostre que toda imersão isométrica $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ com mais de um elemento, se estende de maneira única a uma isometria de $\mathbb{R}$ em si próprio.

**Problema 9.** (*Os p-ádicos*) Seja $p$ um primo. Dado $x \in \mathbb{Q}$, defina $v_p(x) = p^{-n}$ se $x = p^n r/s$, onde $r$ e $s$ são inteiros primos com $p$, e $v_p(0) = 0$. Mostre que $d_p(x, y) = v_p(x - y)$ define uma métrica em $\mathbb{Q}$.

## 2. Continuidade e abertos em espaços métricos

**Problema 10.** (a) Mostre que uma aplicação entre espaços métricos $f : M \to N$ é contínua em $a \in M$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in M$ com $d(x, a) \leq \delta$, temos $d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$.

(b) Sejam $f : M \to N$ e $a \in M$ tais que: para todo $\epsilon \geq 0$, existe $\delta \geq 0$, tal que, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. É $f$ necessariamente contínua em $a$?

**Problema 11.** Mostre que a métrica $d_3$ do Problema 3 é equivalente a $d$.

**Problema 12.** Sejam $M$ e $N$ espaços métricos e denotemos por $d$ tanto a métrica de $M$ quanto a de $N$. Mostre que

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2}$$

e

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

definem métricas equivalentes no produto cartesiano $M \times N$.

**Definição 3.** Diz-se que uma função contínua definida em $\mathbb{R}$, a valores reais ou complexos, tem *suporte compacto* se o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ é limitado. Denotemos nesta lista por $C_c(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real que consiste de todas as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tenham suporte compacto.

**Problema 13.** Denote por $E_i$, $i = 1$, $2$ ou $\infty$, o espaço métrico que se obtém munindo-se $C_c(\mathbb{R})$ da métrica induzida pela norma $||\cdot||_i$,

$$||f||_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt,\ ||f||_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \text{ e } ||f||_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Mostre que a identidade em $C_c(\mathbb{R})$, vista como aplicação entre $E_i$ e $E_j$, é descontínua em 0 se $i \neq j$.
(b) Seja $B_i$ a bola aberta em $E_i$ de raio unitário e centro na origem. Mostre que, se $i \neq j$, então $B_i$ não é um conjunto aberto de $E_j$.
(c) Dada $f \in C_c(\mathbb{R})$, defina $\Phi : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por $\Phi(g) = \int f(x)g(x)dx$. Mostre que $\Phi$ é contínua em $E_i$, para $i = 1, 2$ ou $\infty$. Mostre que $\{g; \Phi(g) > 0\}$ é aberto em $E_i$, e é diferente do espaço todo e do vazio, para $i = 1, 2$ ou $\infty$.

**Problema 14.** O espaço vetorial $X = C[a, b]$ (funções contínuas, a valores reais, definidas no intervalo fechado $[a, b]$, com $a$ e $b$ reais e $a < b$) pode ser munido das normas $||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$, $||f||_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ e $||f||_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in$

$[a, b]\}$. Denote por $E_i$, $i = 1$, 2 ou $\infty$, o espaço métrico que se obtém munindo $X$ da métrica induzida por $||\cdot||_i$. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E_j \\ f & \longmapsto & f^2 \end{array}$$

é contínua se $i = \infty$, ou se $(i, j) = (2, 1)$; e é descontínua em 0 para os cinco demais casos. Dica: Para cuidar do caso $(i, j) = (2, 1)$ aplique a desigualdade de Cauchy-Schwartz $|\int_a^b \phi\psi| \leq ||\phi||_2||\psi||_2$ com $\phi = |f - g|$ e $\psi = |f + g|$.

## 3. Espaços topológicos - definições iniciais

`Problema` **15.** Dados inteiros $k$ e $n$ com $0 < k \leq n$, seja $A \subset E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n$ ($k$ fatores) o conjuntos de todas as $n$-uplas $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ tais que $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ é linearmente independente. Mostre que $A$ é um subconjunto aberto de $E$, identificado com $\mathbb{R}^{nk}$ munido da topologia usual. Dica: use que o determinante é uma função contínua.

`Problema` **16.** Dê exemplo de uma família enumerável de abertos da reta cuja intersecção não seja aberta mas contenha um aberto não-vazio.

`Problema` **17.** Seja $S$ munido da topologia induzida por $f : S \to X$. Sendo $Y$ um espaço topológico, mostre que uma aplicação $g : Y \to S$ é contínua se e somente se a composta $f \circ g$ é contínua.

`Problema` **18.** Seja $S$ munido da topologia induzida por $f : S \to X$.
(a) Mostre que, se $f$ não for injetora, então $S$ não será um espaço de Hausdorff.
(b) Mostre que, se $f$ for injetora e $X$ de Hausdorff, então $S$ será de Hausdorff.
(c) Supondo que $f$ é injetora e que $X$ é metrizável, com topologia induzida por uma métrica $d$, mostre que $\tilde{d}(x, y) = d(f(x), f(y))$ é uma métrica em $S$ e que a topologia definida por esta métrica em $S$ coincide com a topologia induzida por $f$
(d) Conclua que, se $X$ for metrizável, então $S$ também será metrizável se e somente se $f$ for injetora.

**Definição 4.** Um espaço $T_1$ é um espaço topológico $X$ tal que, dados quaisquer distintos $x$ e $y$ em $X$, existem abertos $U$ e $V$ tais que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ e $y \notin U$. Note que todo espaço topológico de Hausdorff é um espaço $T_1$.

`Problema` **19.** Defina em $\mathbb{R}^3$ a relação de equivalência $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ se e somente se $z = z' \neq 0$ ou $((x, y) = (x', y')$ e $z = z' = 0)$. Mostre que o espaço quociente $\mathbb{R}^3/\sim$ é um espaço $T_1$ que não é de Hausdorff. Observação: este espaço topológico aparece na análise harmônica como o dual do grupo de Heisenberg.

## 4. Bases

`Problema` **20.** (a) Seja $X$ um espaço topológico discreto (isto é, todo subconjunto de $X$ é aberto). Mostre que a intersecção de todas as bases de abertos de $X$ é uma base de abertos.
(b) Mostre que não existe uma base de abertos de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) que esteja contida em qualquer outra base de abertos.

**Definição 5.** Uma seminorma em um espaço vetorial real $X$ é uma função $p : X \to [0, +\infty)$ que satisfaz $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ e $p(tx) = |t|p(x)$, para todos $x$ e $y$ em $X$ e para todo $t \in \mathbb{R}$. Dados um conjunto finito $F$ de seminormas em $X$, um ponto

$a \in X$, e um real positivo $r$, definimos $B_{F,a,r} = \{x \in X; p(x-a) < r, \forall p \in F\}$ . Dada uma família arbitrária $\mathcal{F}$ de seminormas em $X$, a topologia induzida por $\mathcal{F}$ em $X$ é a topologia que tem como base de abertos $\mathcal{B} = \{B_{F,a,r}; F \subseteq \mathcal{F}\,\text{finito}, a \in X, r > 0\}$ (vimos em sala que existe uma única topologia em $X$ para a qual $\mathcal{B}$ é uma base de abertos). Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados *abertos básicos*. A família $\mathcal{F}$ *separa pontos* se, dados quaisquer distintos $x$ e $y$ em $X$, existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x-y) \neq 0$.

`Problema` **21.** Mostre que a topologia usual de $\mathbb{R}^n$ coincide com a topologia induzida por $\{p_i; i = 1, \cdots, n\}$, com $p_i(x) = |x_i|$.

`Problema` **22.** Para cada $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, e para cada $a > 0$, considere em $C^\infty(\mathbb{R})$ as seminormas

$$p_{k,a}(f) = \sup\{|f^{(k)}(x)|; x \in [-a, a]\} \quad \text{e} \quad q_k(f) = \max\{p_{j,k}(f); 0 \leq j \leq k\}.$$

Mostre que as topologias induzidas pelas famílias de seminormas $\{p_{k,a}; k \in \mathbb{N}, a > 0\}$ e $\{q_k; k \in \mathbb{N}\}$ coincidem.

Nos três problemas seguintes, $X$ é um espaço vetorial real com a topologia induzida por uma família de seminormas $\mathcal{F}$.

`Problema` **23.** Mostre que, para todo aberto $A \subseteq X$, e para todo $x \in A$, existem $F \subseteq \mathcal{F}$ finito e $r > 0$ tais que $B_{F,x,r} \subseteq A$.

`Problema` **24.** Mostre que, munindo-se $X \times \mathbb{R}$ da topologia-produto, a multiplicação por escalar é uma aplicação contínua.

`Problema` **25.** Mostre $X$ é de Hausdorff se e somente se $\mathcal{F}$ separa pontos.

`Problema` **26.** Seja $X = \mathbb{R} \cup (\mathbb{S}^1 \times \{-\infty, +\infty\})$. Para cada $0 < r < 1$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, e para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina

$$B^{\pm}_{\alpha,r,k} = \{(e^{i\theta}, \pm\infty); |\theta - \alpha| < r\} \cup \Big( \bigcup_{\{j \in \mathbb{Z}; j \mp k \geq 0\}} (\alpha + j - r, \alpha + j + r)\Big).$$

(a) Mostre que a coleção de todos esses $B^{\pm}_{\alpha,r,k}$'s, unida à coleção de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$, é base de uma única topologia em $X$.
(b) Mostre que a aplicação $f : X \to \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ definida por

$$f(t) = (e^{it}, \frac{2}{\pi} \arctan t) \text{ se } t \in \mathbb{R}, \text{ e } f(z, \pm\infty) = (z \pm 1) \text{ se } z \in \mathbb{S}^1$$

é injetora e contínua. Mostre também que a inversa de $f : X \to \texttt{Im}f$ é contínua.

## 5. Interior, fechados, fechos, conexos, convexos

`Problema` **27.** Dado $S \subseteq X$, defina $\chi_S : X \to \mathbb{R}$ por: $\chi_S(x) = 1$ se $x \in S$, e $\chi_S(x) = 0$ se $x \notin S$. Mostre que o conjunto de pontos onde $\chi_S$ não é contínua coincide com a fronteira de $S$.

`Problema` **28.** Mostre que $f : X \to Y$ é contínua se e somente se, para todo $S \subseteq Y$, $f^{-1}(\texttt{int}S) \subseteq \texttt{int}f^{-1}(S)$.

`Problema` **29.** Seja $S$ um conjunto e seja $f$ uma aplicação do conjunto das partes de $S$ em si próprio gozando das seguintes propriedades:

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$;
(2) $T \subseteq f(T)$, para todo subconjunto $T$ de $S$;

(3) $f(f(T)) = f(T)$; para todo subconjunto $T$ de $S$;
(4) $f(T_1 \cup T_2) = f(T_1) \cup f(T_2)$; para todos subconjuntos $T_1$ e $T_2$ de $S$.

(a) Mostre que $f(S) = S$.
(b) Mostre que, se $T_1 \subseteq T_2 \subseteq S$, então $f(T_1) \subseteq f(T_2)$.
(c) Mostre que intereseções arbitrárias de partes de $S$ satisfazem

$$f(\cap_\lambda T_\lambda) \subseteq \cap_\lambda f(T_\lambda).$$

(d) Mostre que o subconjunto $\mathcal{C}$ das partes de $S$ que gozam da propriedade $f(T^c) = T^c$ é uma topologia em $S$ ($T^c$ denotando o complementar em $S$ de um seu subconjunto $T$).
(e) Reciprocamente, mostre que, se $X$ é um espaço topológico, com topologia $\mathcal{T}$, a aplicação $f(T) = \overline{T}$ ($\overline{T}$ denotando o fecho de $T$ nessa topologia) satisfaz as propriedades (1), (2), (3) e (4) acima; e que $\mathcal{T} = \mathcal{C}$.
(f) Mostre que as inclusões dos itens (b) e (c) podem ser estritas.

`Problema` **30.** Dados $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$, mostre que $\overline{S \times T} = \overline{S} \times \overline{T}$.

`Problema` **31.** Mostre que o gráfico de qualquer $f : X \to Y$ tem interior vazio se $Y$ não possui pontos isolados.

`Problema` **32.** Mostre que $X$ é um espaço $T_1$ se e somente, para todo $x \in X$, o conjunto unitário $\{x\}$ é fechado.

`Problema` **33.** Seja $X$ o espaço do Problema 26.
(a) Mostre que o fecho de $\mathbb{R}$ em $X$ é igual a $X$.
(b) Mostre que o interior de $\mathbb{S}^1 \times \{-\infty, +\infty\}$ em $X$ é vazio.
(c) Mostre que $X$ é conexo, mas não é conexo por caminhos, nem localmente conexo.

`Problema` **34.** Sejam $E_1$ e $E_\infty$ os espaços definidos no Problema 14, seja $S = \{f \in C[a,b]; f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]\}$.
(a) Mostre que o interior de $S$ em $E_\infty$ é igual a $\{f \in C[a,b]; f(x) > 0, \forall x \in [a,b]\}$
(b) Mostre que o interior de $S$ em $E_1$ é vazio.

`Problema` **35.** Mostre que os abertos básicos de um espaço vetorial com topologia induzida por uma família de seminormas (veja a Definição 5) são convexos.

`Problema` **36.** Dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que seja conexo e localmente conexo, mas que não seja conexo por caminhos.

## 6. Seqüências, Axiomas de Enumerabilidade

`Problema` **37.** (a) Dê exemplo de uma seqüência no espaço topológico do Problema 19 que possua infinitos limites.
(b) Dê exemplo de uma seqüência com infinitos limites no espaço topológico da $5^a$ questão da primeira prova (disponível na página do curso).

`Problema` **38.** Mostre que o espaço topológico do Problema 19 e o da $5^a$ questão da primeira prova satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade (veja a Definição 6, abaixo).

`Problema` **39.** Seja $X$ um conjunto não-enumerável, e seja $\mathcal{T} = \{A \subseteq X; A^c$ é enumerável$\} \cup \{\emptyset\}$.
(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $X$.
(b) Mostre que, para todo $x_0 \in X$, o fecho de $X \setminus \{x_0\}$ é igual a $X$.

(c) Mostre que nenhuma seqüência em $X \setminus \{x_0\}$ pode convergir para $x_0$
(d) Conclua que este espaço topológico não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

**Definição 6.** Um espaço topológico: satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável; satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se possui uma base de abertos enumerável; é separável se possui um subconjunto enumerável denso.

**Problema 40.** (a) Mostre que se um espaço satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e é separável.
(b) Mostre que um conjunto não-enumerável munido da topologia discreta satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, mas não o segundo, nem é separável.
(c) Mostre que $\{[a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ é base de uma topologia em $\mathbb{R}$.
(d) Mostre que $\mathbb{R}$ munido da topologia do item anterior satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, é separável, mas não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

**Problema 41.** Sejam $E_1$ e $E_\infty$ os espaços métricos definidos no Problema 13. Use seqüências para provar que:
(a) A aplicação $E_1 \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ não é contínua.
(b) A aplicação $E_\infty \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ é contínua.
(c) A aplicação $E_1 \ni f \mapsto \int f(x)dx \in \mathbb{R}$ é contínua.
(d) A aplicação $E_\infty \ni f \mapsto \int f(x)dx \in \mathbb{R}$ não é contínua.

## 7. Algumas soluções

**Problema 7-b**: Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, define-se $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Vamos usar que $(x, y) \mapsto x \cdot y$ é uma aplicação bilinear e simétrica e que $|x| = \sqrt{x \cdot x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dados $x$ e $y$ em $\mathbb{S}^n$, temos portanto:

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + y \cdot y + 2x \cdot y = 2 + 2x \cdot y \tag{1}$$

e

$$|x - y|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x \cdot x + y \cdot y - 2x \cdot y = 2 - 2x \cdot y. \tag{2}$$

Se $|x-y| < \sqrt{2}$, então $|x-y|^2 < 2$. Segue portanto de (2) que $2x\cdot y = 2-|x-y|^2 > 0$; isto é $x \cdot y > 0$. Segue daí e de (1) que $|x + y|^2 = 2 + 2x \cdot y \geq 2$ e, portanto, que $|x + y| > \sqrt{2} > |x - y|$.

Isto é, provamos que, se $|x - y| < \sqrt{2}$, então $|x + y| > |x - y|$ e, portanto, que $d(\pi(x), \pi(y)) = \min\{|x - y|, |x + y|\} = |x - y|$. Se $A \subset \mathbb{P}^n$ tem diâmetro $d$ menor que $\sqrt{2}$, então $|x - y| \leq d < \sqrt{2}$, quaisquer que sejam $x$ e $y$ em $A$. Decorre então do que provamos que $d(\pi(x), \pi(y)) = |x - y|$, para todo $x$ e todo $y$ em $A$, como queríamos.

**Problema 8-b**: Suponha que $X$ possui apenas dois pontos, $X = \{a, b\}$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma imersão isométrica, então

$$f(b) = f(a) \pm (b - a). \tag{3}$$

Substituindo-se $x$ no lugar de $b$ em (3), definamos $\tilde{f}(x) = f(a) \pm (x - a)$, $x \in \mathbb{R}$. É claro que $\tilde{f}$ é uma extensão de $f$ e que, em qualquer caso ($+$ ou $-$) $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |x - y|$. Além disso, é claro que $\tilde{f}$ é sobrejetora; isto é, $\tilde{f}$ é uma isometria.

Até agora provamos apenas que, se $X$ possui apenas dois pontos, então toda imersão isométrica de $X$ em $\mathbb{R}$ pode ser estendida a uma isometria de $\mathbb{R}$ em si próprio.

Suponha agora que $X$ possui mais de dois pontos, e sejam $a$ e $b$ dois pontos de $X$, $a < b$. Tal como antes, vale (3) com algum sinal. Suponhamos primeiro que vale (3) com $+$; isto é, suponhamos que $f(b) = f(a) + (b - a)$. Provemos então que

$$f(x) = f(a) + (x - a), \ \forall x \in X. \tag{4}$$

É claro que (4) vale se $x = a$ ou $x = b$. Basta então provar (4) para $x$ diferente de $a$ e de $b$. Como $f$ é imersão isométrica, dado $x \in X$ diferente de $a$ e de $b$, como antes temos que $f(x) = f(a) \pm (x - a)$. Suponhamos por absurdo que $f(x) = f(a) - (x - a)$. Então

$$f(b) - f(x) = [f(a) + (b - a)] - [f(a) - (x - a)] = b + x - 2a.$$

Logo, $|f(b) - f(x)| = |b + x - 2a|$. Mas $|b + x - 2a| \neq |b - x|$ (pois $b + x - 2a = b - x$ implicaria que $x = a$, e $b + x - 2a = -(b - x)$ implicaria que $a = b$; mas temos $a \neq b \neq x \neq a$), o que contradiz a hipótese de que $f$ é imersão isométrica. Vemos então que $\tilde{f}(x) = f(a) + (x - a)$, $x \in \mathbb{R}$, é uma isometria de $\mathbb{R}$ em si próprio que estende $f$.

De maneira completamente análoga, prova-se que, se vale $f(b) = f(a) - (b - a)$, então $f(x) = f(a) - (x - a)$ para todo $x \in X$. E que $\tilde{f}(x) = f(a) - (x - a)$ é uma isometria de $\mathbb{R}$ em si próprio que estende $f$.

Note que provamos também que a extensão é única, pois se $g$ é uma isometria de $\mathbb{R}$ em si próprio, os valores de $g$ em dois pontos distintos de $\mathbb{R}$ determinam o valor de $g$ em todos os pontos de $\mathbb{R}$ (é só aplicar o argumento acima para $X = \mathbb{R}$). Ou seja, provamos também o item a do Problema 8 *sem usar* que imagem de intervalo por função contínua é um intervalo.

**Problema 23** Sejam dados aberto $A \subseteq X$ e ponto $x \in A$. Por definição de base, existe algum aberto básico $B \in \mathcal{B}$ (veja a Definição 5) tal que $x \in B \subseteq A$. Isto é, existem $y \in X$, $r > 0$ e $F \subseteq \mathcal{F}$ finito, tais que $x \in B_{F,y,r} \subseteq A$. Seja $s = \min\{r - p(x - y); p \in \mathcal{F}\}$. Como $x \in B_{F,y,r}$, cada um desses finitos $r - p(x - y)$, $p \in \mathcal{F}$, é positivo. Segue então que $s > 0$, pois $s$ é o menor elemento de um conjunto finito de números positivos. Provemos que $B_{F,x,s} \subseteq B_{F,y,r}$ (isso basta, pois então teremos $B_{F,x,s} \subseteq A$).

De fato, seja $z \in B_{F,x,s}$. Então, para todo $p \in F$, $p(x - z) < s$, e, portanto,

$$p(z - y) = p(z - x + x - y) \leq p(z - x) + p(x - y) <$$

$$s + p(x - y) \leq [r - p(x - y)] + p(x - y) = r,$$

como queríamos.

**Problema 36**: Solução e redação de Daniel Tausk.

Antes de construir o conjunto, provamos um lema geral.

**Lema 1.** *Sejam $X$, $Y$ espaços topológicos conexos e seja $D \subset X$ um subconjunto denso. Seja $S \subset X \times Y$ um subconjunto com as seguintes propriedades:*

(a) *$D \times Y \subset S$;*

(b) *para todo $x \in X \setminus D$, o conjunto $S_x = \big\{y \in Y : (x, y) \in S\big\}$ é denso em $Y$.*

*Então $S$ é conexo.*

*Demonstração.* Seja $A \subset S$ um subconjunto não vazio, aberto e fechado relativamente a $S$. Denote por $\pi_1 : X \times Y \to X$ a primeira projeção. Começamos mostrando que $\pi_1(A)$ é aberto em $X$. De fato, seja $x \in \pi_1(A)$. Temos que existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in A$. Como $A$ é aberto em $S$, existem uma vizinhança aberta $U$ de $x$ em $X$ e uma vizinhança aberta $V$ de $y$ em $Y$ tal que $(U \times V) \cap S \subset A$. Afirmamos que $U \subset \pi_1(A)$. De fato, dado $x' \in U$ então $S_{x'}$ é denso em $Y$ (pois, pela propriedade (a), $S_{x'} = Y$ para $x' \in D$ e, pela propriedade (b), $S_{x'}$ é denso em $Y$ para $x' \in X \setminus D$); logo existe $y' \in S_{x'} \cap V$ e portanto $(x', y') \in (U \times V) \cap S \subset A$. Logo $U \subset \pi_1(A)$ e fica estabelecido que $\pi_1(A)$ é aberto em $X$.

Vamos agora mostrar que $\pi_1(A)$ é fechado em $X$. Em primeiro lugar, afirmamos que:

$$\big(\pi_1(A) \cap D\big) \times Y \subset A. \tag{5}$$

De fato, dado $x \in X$ então o conjunto $A_x = \big\{y \in Y : (x, y) \in A\big\}$ é aberto e fechado relativamente a $S_x$, pois $A$ é aberto e fechado relativamente a $S$ e a função $S_x \ni y \mapsto (x, y) \in S$ é contínua. Se $x \in \pi_1(A) \cap D$ então $A_x$ não é vazio (pois $x \in \pi_1(A)$) e $S_x = Y$ (pela propriedade (a)). Como $Y$ é conexo, segue que $A_x = Y$, para todo $x \in \pi_1(A) \cap D$. Isso completa a demonstração de (5). Como $A$ é fechado relativamente a $S$, temos que o fecho de $\big(\pi_1(A) \cap D\big) \times Y$ relativamente a $S$ está contido em $A$, ou seja:

$$\overline{\big(\pi_1(A) \cap D\big) \times Y} \cap S \subset A;$$

daí:

$$\overline{\big(\pi_1(A) \cap D\big) \times Y} \cap S = \big(\overline{\pi_1(A) \cap D} \times Y\big) \cap S \subset A. \tag{6}$$

Como $\pi_1(A)$ é aberto em $X$ e $D$ é denso em $X$, segue que $\pi_1(A) \cap D$ é denso em $\pi_1(A)$ e portanto:

$$\overline{\pi_1(A) \cap D} = \overline{\pi_1(A)}. \tag{7}$$

De (6) e (7) segue que:

$$\big(\overline{\pi_1(A)} \times Y\big) \cap S \subset A. \tag{8}$$

Supondo que $Y$ não é vazio (para $Y = \emptyset$ o lema é trivialmente verdadeiro, pois aí $S = \emptyset$) então para todo $x \in X$ o conjunto $S_x$ é não vazio, já que é denso em $Y$; em particular, para todo $x \in \overline{\pi_1(A)}$ existe $y \in Y$ com $(x, y) \in S$ e daí, por (8), temos $(x, y) \in A$ e portanto $x \in \pi_1(A)$. Mostramos então que $\overline{\pi_1(A)} \subset \pi_1(A)$, ou seja, $\pi_1(A)$ é fechado em $X$. Como $A$ não é vazio, temos que $\pi_1(A)$ não é vazio e portanto, como $X$ é conexo, $\pi_1(A) = X$. De (5) segue agora que $D \times Y \subset A$. Finalmente, como $A$ é fechado relativamente a $S$ temos:

$$\overline{D \times Y} \cap S = (X \times Y) \cap S = S \subset A,$$

ou seja $A = S$. $\square$

Vamos agora construir o conjunto pedido. Denote por $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as curvas contínuas $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(1) = (1, 0)$. Vamos mostrar inicialmente que $\mathcal{C}$ tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Em primeiro lugar, temos que a aplicação:

$$\mathcal{C} \ni \gamma \longmapsto \gamma|_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \in \mathfrak{F}\big([0, 1] \cap \mathbb{Q}, \mathbb{R}^2\big)$$

é injetora, onde $\mathfrak{F}(A, B)$ denota o conjunto de todas as funções com domínio em $A$ e contra-domínio em $B$. Como $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ é infinito enumerável e $\mathbb{R}^2$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$, segue que $\mathfrak{F}\big([0,1]\cap\mathbb{Q},\mathbb{R}^2\big)$ tem a mesma cardinalidade que $\mathfrak{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Mas $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathfrak{F}\big(\mathbb{N},\{0,1\}\big)$ e portanto:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})\cong\mathfrak{F}\big(\mathbb{N},\mathfrak{F}\big(\mathbb{N},\{0,1\}\big)\big)\cong\mathfrak{F}\big(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\{0,1\}\big)\cong\mathfrak{F}\big(\mathbb{N},\{0,1\}\big)\cong\mathbb{R}.$$

Mostramos então que $\mathcal{C}$ tem cardinalidade menor ou igual à cardinalidade de $\mathbb{R}$ e é fácil ver que $\mathcal{C}$ tem cardinalidade maior ou igual à cardinalidade de $\mathbb{R}$. Logo $\mathcal{C}$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Como o conjunto $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ também tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, temos que existe uma função bijetora $\phi:\mathcal{C}\to[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

Para cada $\gamma\in\mathcal{C}$, escrevemos $\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, para todo $t\in[0,1]$. Temos que $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua com $x(0)=0$ e $x(1)=1$ e portanto sua imagem contém o intervalo $[0,1]$; em particular, existe um instante $t_\gamma\in[0,1]$ tal que $x(t_\gamma)$ é igual ao número irracional $\phi(\gamma)\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Definimos agora o conjunto:

$$S=\mathbb{R}^2\setminus\big\{\gamma(t_\gamma):\gamma\in\mathcal{C}\big\}.$$

Obviamente o conjunto $S$ não é conexo por caminhos; de fato, temos que $(0,0)\in S$, $(1,0)\in S$ mas se $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ é uma curva contínua ligando $(0,0)$ a $(1,0)$ então $\gamma(t_\gamma)\notin S$.

Vamos mostrar agora que $S$ é conexo e localmente conexo. Note que o conjunto $S$ também pode ser descrito como o complementar do gráfico da função $f:[0,1]\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ definida por $f(\alpha)=y(t_\gamma)$, onde $\gamma=\phi^{-1}(\alpha)$ e $y$ denota a segunda componente de $\gamma$. Em particular, temos o seguinte:

- $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\subset S$;
- para $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, o conjunto $S_\alpha=\big\{z\in\mathbb{R}:(\alpha,z)\in S\big\}$ é igual à reta $\mathbb{R}$ ou igual à reta $\mathbb{R}$ menos um ponto.

Portanto, fazendo $X=Y=\mathbb{R}$ e $D=\mathbb{Q}$, estamos dentro das hipóteses do Lema 1 e concluímos que $S$ é conexo. Para ver que $S$ é localmente conexo, basta mostrar que se $I,J\subset\mathbb{R}$ são intervalos arbitrários então $(I\times J)\cap S$ também é conexo; isso segue também do Lema 1 fazendo $X=I$, $Y=J$ e $D=I\cap\mathbb{Q}$. Observe que $S$ não pode ser localmente conexo por caminhos (pois um espaço conexo e localmente conexo por caminhos seria também conexo por caminhos).