UM COMPLEMENTO À AULA SOBRE FÓRMULA DE TAYLOR E PONTOS CRÍTICOS

1. Pontos de Inflexão e Fórmula de Taylor

Na aula de 12 de novembro, enunciei o seguinte resultado (que chamei de "item c" do Problema b6 da Lista).

Proposição 1: Seja f uma função de classe C^3 em um intervalo aberto I. Se $f'(a) = f''(a) = 0$ e se $f'''(a) \neq 0$, então f possui um ponto de inflexão em a.

O argumento que dei ao tentar provar essa afirmação, entretanto, não demonstra que a é ponto de inflexão. Vejamos porquê.

Primeiramente suponhamos que $f'''(a)$ é maior que zero (se fosse menor, o argumento seria análogo). Então, como f''' é contínua, $f'''(x) > 0$ para todo x em um intervalo aberto J contendo a. O Teorema de Taylor (de ordem 1, com resto de ordem 2) aplicado a f' nos garante então que, dado qualquer $x \in J$, existe c entre a e x tal que

$$f'(x) = \frac{1}{2} f'''(c)(x-a)^2.$$

Até aqui, está tudo igual ao que foi feito em sala. A equação acima implica que $f'(x) > 0$ para todo $x \in J$ diferente de a. Daí, f é crescente em J. Mas isto ainda não basta para concluir que f'' muda de sinal em a.

Uma maneira de provar a proposição acima é aplicando o Teorema de Taylor de ordem zero (ou seja, o Teorema do Valor Médio) a $g = f''$. Concluímos assim que, para todo $x \in J$, existe c entre a e x (logo, $c \in J$) tal que

$$g(x) = g(a) + g'(c)(x-a)$$

isto é (como $g(a) = f''(a) = 0$ e $g'(c) = f'''(c)$),

$$f''(x) = f'''(c)(x-a).$$

Como f''' é positiva em J, segue da equação acima que f'' é positiva à direita de a e negativa à esquerda de a. Isto é, a é um ponto de inflexão, como queríamos demonstrar.

Há uma maneira mais simples de argumentar: como f''' é positiva em J, f'' é crescente em J; daí, como $f''(a) = 0$, f'' é positiva à direita de a e negativa à esquerda de a.

Mas é indispensável usar a Fórmula de Taylor, por exemplo, para demonstrarmos a seguinte proposição:

Proposição 2: Seja f uma função de classe C^5 em um intervalo aberto I. Se $f''(a) = f'''(a) = f''''(a) = 0$ e se $f^{(5)}(a) \neq 0$, então f possui um ponto de inflexão em a.

Demonstração: Primeiramente suponhamos que $f^{(5)}(a)$ é maior que zero (se fosse menor, o argumento seria análogo). Então, como $f^{(5)}$ é contínua, $f^{(5)}(x) > 0$ para todo x em um intervalo aberto J. O Teorema de Taylor (de ordem 2) aplicado a $g = f''$ nos garante então que, dado qualquer $x \in J$, existe c entre a e x tal que

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}g'''(c)(x-a)^3;$$

isto é (usando que $g = f''$ e que, por hipótese, $f''(a) = f'''(a) = f''''(a) = 0$), vem que

$$f''(x) = \frac{1}{6}f^{(5)}(c)(x-a)^3.$$

Como $c \in J$, $f^{(5)}(c) > 0$, e portanto $f''(x) > 0$ para todo $x \in J$ tal que $x > a$; e $f''(x) < 0$ para todo $x \in J$ tal que $x < a$. Isto é, a é um ponto de inflexão para f.

É fácil generalizar a demonstração da Proposição 2, acima, e a solução do problema $b6$ da Lista e obter o seguinte teorema.

Teorema Seja f uma função de classe C^n em um intervalo aberto I contendo a. Se $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, e se $f^{(n)}(a) \neq 0$, então:

(1) Se n for ímpar, f terá um ponto de inflexão em a.

(2) Se n for par, f terá ou um ponto de máximo local estrito em a (caso $f^{(n)}(a) < 0$), ou um ponto de mínimo local estrito em a (caso $f^{(n)}(a) > 0$).

2. Um detalhe sobre a classificação dos pontos críticos

Na aula de 12 de novembro, ficou faltando um detalhe na demonstração da seguinte proposição, que depois usamos para demonstrar o critério de classificação de pontos críticos de funções de duas variáveis.

Proposição 3. Dadas a, b e c constantes reais, considere a função $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Se $\Delta = ac - b^2 < 0$, então existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) tais que $Q(h_1, k_1) < 0 < Q(h_2, k_2)$.

Provamos esta proposição, em sala, supondo $a \neq 0$. Aqui vai uma demonstração para o caso em que $a = 0$; isto é, quando temos:

$$Q(h,k) = 2bhk + ck^2.$$

Como $a = 0$, $\Delta = -b^2$. Como $\Delta < 0$, b é não nulo.

Se $c = 0$, então $Q(h,k) = 2bhk$; logo, Q tem o mesmo sinal que b no primeiro e no terceiro quadrante, e o sinal contrário ao de b no segundo e no quarto quadrante. Daí, há pontos onde a função Q é positiva e pontos onde ela é negativa.

Se $c \neq 0$, então $Q(0,1) = c$ e $Q(c,-b) = -cb^2$. Ou seja, em um dos dois pontos, $(0,1)$ ou $(c,-b)$, Q é negativa, no outro, positiva; como queríamos.