

Nome : _____

Número USP : _____

Assinatura : _____

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Nota

Questão 1: Considere a função $f(x) = (1+x)^{1/3}$, $x > -1$.

(a) Calcule $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f''''(x)$.(b) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de 0.(c) Encontre um número racional r tal que $|r - (3/2)^{1/3}| < 1/300$.(d) O número r que você encontrou no item c é maior ou menor que $(3/2)^{1/3}$?

$$(a) f'(x) = \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} (1+x)^{-5/3}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27} (1+x)^{-8/3},$$

$$f''''(x) = -\frac{80}{81} (1+x)^{-11/3}. \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = -\frac{2}{9}, \quad f'''(0) = \frac{10}{27}$$

$$(b) P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{27 \cdot 6}x^3$$

$$(c) f\left(\frac{1}{2}\right) = P_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''''(c)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \text{ para algum } c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$E = \frac{f''''(c)}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = -\frac{80}{81} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+c)^{11/3}} \quad \therefore |E| < \frac{1}{24 \cdot 16} = \frac{1}{384} < \frac{1}{300}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 16 \\ \hline 144 \\ 24 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\text{Assim se } r = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{81} \cdot \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = r + E,$$

$$-\frac{1}{300} < E < 0. \text{ Assim } \left| r - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \right| < \frac{1}{300} \text{ e}$$

$$(d) r > \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$$

$$\text{Obs } r = \frac{3^4 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^2 - 3^2 \cdot 2 + 5}{3^4 \cdot 2^3} = \frac{743}{648} \approx 1,1466$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \approx 1,1447 \quad |\text{ERRO}| \approx 0,0019$$

(Cálculos com máquina)