MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas
IME-USP, 1° Semestre de 2013
Sexta Lista

(**1**) Dois jogadores se enfrentam em uma batalha de War, o Jogo da Estratégia. O atacante lança três dados e o defensor, dois. O atacante conquistará o território do defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas: (1) o maior dado do atacante for maior do que o maior dado do defensor e (2) o segundo maior dado do atacante for maior do que o segundo maior dado do defensor (convencionamos que o "segundo maior dado" pode ser igual ao maior dado, caso dois ou mais dados empatem no maior valor).

Calcule a probabilidade de o atacante conquistar o território com o defensor tirando: (a) 2 cincos, (b) 1 cinco e 1 quatro, (c) 1 cinco e 1 três, (d) 1 cinco e 1 dois, (e) 1 cinco e 1 um, (f) pelo menos 1 cinco, (g) pelo menos 1 quatro. `Respostas`: (b) $\frac{43}{216}$, (g) $\frac{443}{1188}$.

(**2**) Dez bolas diferentes são colocadas em quatro urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas fiquem ocupadas?

(**3**) (a) De quantas maneiras distintas dez bolas idênticas podem ser distribuídas entre quatro urnas diferentes, considerando-se válidas as distribuições nas quais uma ou mais urnas ficam sem bolas?
(b) Supondo que as distribuições do item anterior sejam equiprováveis, determine a probabilidade de que todas as urnas sejam ocupadas.

(**5**) Em cada concurso da mega-sena, sorteiam-se seis de sessenta dezenas. (a) Calcule a probabilidade de o apostador ganhar a sena se fizer sete apostas em um sorteio (b) Calcule a probabilidade de o apostador ganhar a sena pelo menos uma vez se fizer uma aposta em sete sorteios consecutivos.
`Respostas`: (a)$\frac{7!}{60.59.58.57.56.55}$. (b) $1-(1-\frac{6!}{60.59.58.57.56.55})^7$.

`Observação`: Usando a máquina de calcular ou algebricamente, podemos verificar que a probabilidade obtida no 5(a) maior do que a do item (b). Será que isto significa que vale mais a pena apostar o mesmo dinheiro de uma vez só, em vez de "parcelar o investimento"? Dá para suspeitar que não, pois, no segundo caso há a chance de ganhar mais de uma vez e a diferença entre as duas probabilidades é ínfima (a segunda é um pouco menos de 6 milionésimos por cento maior que a primeira). No problema seguinte veremos que tanto faz: o *valor esperado* da quantia a ser recebida nos dois casos é o mesmo.

(**6**) A cada sorteio, uma loteria seleciona com igual probabilidade um elemento de um conjunto S com N elementos (no problema anterior, S é o conjunto dos subconjuntos de 6 elementos do conjunto das primeiras 60 dezenas e, portanto, $N=\frac{60!}{54!.6!}$). Quem tiver apostado no elemento escolhido receberá uma certa importância P, que suporemos constante ao longo dos diversos sorteios. O valor esperado da quantia que receberá o apostador, caso ele aposte em k elementos em um dado sorteio é, portanto, igual a kP/N. Mostre que o valor esperado da quantia a ser recebida pelo apostador no caso em que ele aposta em apenas um elemento de S durante k semanas consecutivas também é igual a kP/N.

(**7**) Cinco homens, entre os quais Fernando, e cinco mulheres, entre as quais Isabel, compram dez cadeiras consecutivas na mesma fila de um teatro. Supondo que se sentaram aleatoriamente nas dez cadeiras, calcule:

(a) a probabilidade de que homens e mulheres se sentem em cadeiras alternadas,
(b) a probabilidade de que Fernando e Isabel se sentem juntos,
(c) a probabilidade de que todas a mulheres se sentem juntas,
(d) a probabilidade de que todos os homens se sentem juntos e todas as mulheres se sentem juntas.

Solução do 6

Calculemos primeiramente o valor esperado V da quantia que receberá o apostador caso ele aposte em k elementos em um dado sorteio. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_k$ os elementos (distintos) de S nos quais ele apostou. [1] A probabilidade de cada elemento de S ser sorteado é $\frac{1}{N}$. O valor recebido p pelo apostador será igual a P caso sejam sorteados um dos x_i, $i = 1, \cdots, k$, e será zero caso contrário. Queremos portanto calcular o valor esperado da variável aleatória $p : S \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \begin{cases} P, & \text{se } x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Como o espaço amostral S é finito e cada ponto tem a mesma probabilidade, o valor esperado de p em S é simplesmente a média aritmética dos valores assumidos por p em S, que tem N elementos:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{x \in S} p(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} P = \frac{kP}{N}.$$

Passemos agora a tratar da pergunta formulada no problema: qual é o valor esperado da quantia a ser recebida pelo apostador no caso em que ele aposta em um elemento de S em cada um de k sorteios.

Para simplicar o problema, suponhamos que o apostador decide a priori, antes de qualquer sorteio, quais serão suas apostas nos k sorteios. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_k$ os elementos (não-necessariamente distintos) de S escolhidos para os k sorteios.

O espaço amostral agora será o produto cartesiano $S^k = S \times S \times \cdots \times S$ (produto com k parcelas), ou seja, o conjunto de todas as k-uplas $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ de elementos de S. O prêmio p a ser recebido pelo apostador, ao fim dos k sorteios, será igual a P multiplicado pelo número de vezes em que o apostador acertar o sorteio, ou seja, o número de elementos, que denotaremos por $n(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, do conjunto $\{i;\, x_i = y_i,\, 1 \leq i \leq k\}$. Queremos portanto calcular o valor esperado V da variável aleatória

$$p : S^k \to \mathbb{R}, \quad p(y_1, y_2, \cdots, y_k) = n(y_1, y_2, \cdots, y_n)\, P.$$

Como o espaço amostral S^k é finito e cada ponto tem a mesma probabilidade, o valor esperado de p em S^n é simplesmente a média aritmética dos valores assumidos por p em S^k, que tem N^k elementos:

$$V = \frac{1}{N^k} \sum_{(y_1, \cdots, y_n) \in S^k} p(y_1, \cdots, y_n) = \frac{P}{N^k} \sum_{(y_1, \cdots, y_n) \in S^k} n(y_1, \cdots, y_n). \tag{1}$$

Reduzimos o problema a calcular a soma (que depende apenas de k e N)

$$\sigma = \sum_{(y_1, \cdots, y_n) \in S^k} n(y_1, \cdots, y_n).$$

O problema pede que mostremos que $V = \frac{kP}{N}$, ou seja, que

$$\frac{P\sigma}{N^k} = \frac{kP}{N},$$

ou seja, que

$$\sigma = kN^{k-1}.$$

Nossa estratégia será manter N fixo e provar que $\sigma = kN^{k-1}$ por indução sobre k. Para isso, vamos fazer uma ligeira mudança de notação e denotar, para cada inteiro positivo k,

$$\sigma_k = \sum_{(y_1, \cdots, y_n) \in S^k} n(y_1, \cdots, y_n).$$

Também passaremos a denotar a função $n : S^k \to \mathbb{R}$ por n_k, para indicar que o domínio é S^k.

Para $k = 1$,

$$n_1(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y \neq x \\ 1 \text{ se } y = x \end{cases} ,$$

[1]No caso da mega-sena, é preciso supor que cada sena é apostada em um cartão diferente. Caso contrário, os conjuntos de 6 dezenas não seriam escolhidos equiprovavelmente.

logo
$$\sigma_1 = \sum_{y \in S} n_1(y) = 1,$$
e a afirmação é verdadeira para $k = 1$. Na aula de 11 de maio de 2018, usamos argumentos geométricos para verificar que a fórmula é verdadeira para $k = 2, 3$.

Para cada $k > 1$, temos:
$$n_k(y_1, \cdots, y_k) = \begin{cases} n_{k-1}(y_1, \cdots, y_{k-1}), & \text{se } y_k \neq x_k \\ n_{k-1}(y_1, \cdots, y_{k-1}) + 1, & \text{se } y_k = x_k \end{cases},$$
Supondo que a fórmula é verdadeira para $k - 1$, isto é, que $\sigma_{k-1} = (k-1)N^{k-2}$, vem:
$$\sigma_k = \sum_{(y_1, \cdots, y_k) \in S^k} n_k(y_1, \cdots, y_k) = \sum_{y_k \in S} \left[\sum_{(y_1, \cdots, y_{k-1}) \in S^{k-1}} n_k(y_1, \cdots, y_k) \right] =$$
$$\sum_{(y_1, \cdots, y_{k-1}) \in S^{k-1}} n_k(y_1, \cdots, y_{k-1}, x_k) + \sum_{y_k \in S, y_k \neq x_k} \left[\sum_{(y_1, \cdots, y_{k-1}) \in S^{k-1}} n_k(y_1, \cdots, y_k) \right] =$$
$$\sum_{(y_1, \cdots, y_{k-1}) \in S^{k-1}} [n_{k-1}(y_1, \cdots, y_{k-1}) + 1] + \sum_{y_k \in S, y_k \neq x_k} \left[\sum_{(y_1, \cdots, y_{k-1}) \in S^{k-1}} n_{k-1}(y_1, \cdots, y_{k-1}) \right] =$$
$$\sigma_{k-1} + N^{k-1} + (N-1)\sigma_{k-1} = (k-1)N^{k-2} + N^{k-1} + (N-1)(k-1)N^{k-2} = kN^{k-1},$$
como queríamos.