MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas
IME-USP, 1° Semestre de 2013, Quinta Lista

(**1**) (a) Encontre todos os inteiros positivos menores do que mil que são múltiplos de nove e cujos dígitos (de sua expansão na base 10) são todos pares.
(b) Existem quantos inteiros positivos menores do que dez mil que são múltiplos de nove e com dígitos todos pares?

(**2**) Dado n, um inteiro maior do que 4, mostre que:
(a) n é composto se, e somente se, $(n-1)!$ é divisível por n.
(b) n tem mais de um fator primo se, e somente se, $\text{mmc}(2, 3, \cdots, n-1)$ é divisível por n.

(**3**) (OBMEP 2009) Chamaremos um número inteiro k de simpático quando existirem inteiros positivos a, b e c, com $a < b < c$, tais que $k = a^2 + b^2 - c^2$.
(a) Mostre que 0, 1 e 2 são simpáticos.
(b) Dadas m, n e p reais, verifique que $(3x + m)^2 + (4x + n)^2 - (5x + p)^2 = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com a e b satisfazendo $\begin{cases} 6m + 8n - 10p &= a \\ m^2 + n^2 - p^2 &= b \end{cases}$.
(c) Encontre m, n e p inteiros que satisfaçam $\begin{cases} 6m + 8n - 10p &= 2 \\ m^2 + n^2 - p^2 &= 0 \end{cases}$. Dica: Tente fazer $m = 0$.
(d) Mostre que todos os pares maiores do que 2 são simpáticos.
(e) Encontre m, n e p inteiros que satisfaçam $\begin{cases} 6m + 8n - 10p &= 2 \\ m^2 + n^2 - p^2 &= 1 \end{cases}$. Dica: Tente fazer $m = 1$.
(f) Mostre que todos os ímpares maiores do que 2 são simpáticos.

(**3**') Chamaremos um número inteiro n de simpaticíssimo quando existirem inteiros positivos a, b, com $a < b$, tais que $n = a^2 + b^2 - (b + 1)^2$. Mostre que todos os números inteiros (os negativos inclusive) são simpaticíssimos. Dica: Tente fazer $a = n + 1$.

(**3**") Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $f(a, b) = (a + 2, b + 2a + 1)$.
(a) Verifique que, se $a^2 + b^2 - (b + 1)^2 = n$ e se $(a', b') = f(a, b)$, então $(a')^2 + (b')^2 + (b' + 1)^2 = n + 2$.
(b) Mostre que, se $a < b$ e se $(a', b') = f(a, b)$, então $a' < b'$.
(c) Mostre por indução que todos os inteiros positivos são simpaticíssimos.
(d) Defina as sequências a_n e b_n por $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ e $(a_n, b_n) = f(a_{n-2}, b_{n-2})$ se $n \geq 2$. Mostre que $a_n = n + 1$ e $b_n = (n^2 + n)/2$ para todo n.

(**4**) (OBMEP 2011) Dado um número natural n, chamaremos um múltiplo não-nulo de n de *múltipolo irado* se sua expansão na base dez tem apenas uns e zeros (por exemplo, 10, 100 e 110 são múltiplos irados de 2).
(a) Ache os menores múltiplos irados de 3, de 7, de 9, de 35 e de 45.
(b) Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo irado.
(c) Dado um inteiro $n > 1$, sejam $m \geq 1$, $r \geq 0$ e $s \geq 0$ os únicos inteiros tais que $n = 2^r 5^s m$ e $\text{mdc}(m, 10) = 1$. Mostre que M é um múltiplo irado de m se se somente se $N = M \cdot 10^{\max\{r,s\}}$ é múltiplo irado de n.
(d) Dado um inteiro positivo n, seja $f(n)$ o menor número de uns que algum múltiplo irado de n pode ter. Mostre que $f(n) \leq n$ para todo n e que a igualdade só se verifica quando n é igual 1, 3 ou 9.

(**4**') Dado um número inteiro $b \geq 2$ e um natural n, chamaremos um múltiplo nao-nulo de n de b-*irado* se sua expansão na base b tem apenas uns e zeros.
(a) Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo b-irado.
(b) Dado n um inteiro positivo, seja $f_b(n)$ o menor número de uns que algum múltiplo b-irado de n pode ter. Mostre que $f_b(n) \leq n$ para todo n e que $f_b(n) = n$ se, e somente se, o resto da divisão de b por n é igual a um.

(**5**) (a) Dados m, n e p reais, verifique que $(6x + m)^2 + (8x + n)^2 - 4(5x + p)^2 = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com a e b satisfazendo $\begin{cases} 12m + 16n - 40p &= a \\ m^2 + n^2 - 4p^2 &= b \end{cases}$.
(b) Encontre m, n e p inteiros que satisfaçam $\begin{cases} 12m + 16n - 40p &= 4 \\ m^2 + n^2 - 4p^2 &= 1 \end{cases}$. Dica: Tente fazer $m = 1$.
(c) Mostre que, para cada $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \equiv 1 \pmod 4$, existem a, b e c inteiros tais que $a^2 + b^2 - 4c^2 = k$.