(*) $\boxed{p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad a<x<b}$

Solução "geral": $y(x) = \dfrac{1}{P(x)}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \dfrac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds\right]$

onde $P(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p(s)}ds}$ satisfaz $P'(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)} P(x)$, $a<x<b$.

Queremos estudar o que ocorre qdo $x \to a+$. Temos:

i) Por hipótese, $\int_a^{a+\varepsilon} \dfrac{1}{p(x)}dx = +\infty$. Daí, para todo $x_0 \in]a,b[$,

$$\lim_{x\to a+} \int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p(s)} ds = -\lim_{x\to a+} \int_{x}^{x_0} \frac{q(s)}{p(s)} ds = -\infty.$$

ii) De i) segue que $\lim_{x\to a+} P(x) = 0$ e $\lim_{x\to a+} \dfrac{1}{P(x)} = +\infty$.

iii) Para todos $x, y \in]a,b[$, $y \le x$, ~~tem~~

$$\int_y^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)ds = \int_y^x \frac{r(s)}{q(s)} \frac{q(s)}{p(s)} P(s)ds. \quad \text{Segue que}$$

$$m \int_y^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)ds \le \int_y^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)ds \le M \int_y^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)ds$$

~~Dessa~~ onde m e M são os valores mínimo e máximo de $\dfrac{r(s)}{q(s)}$ em $[y,x]$. Do teorema do valor intermediário, temos:

$$\int_y^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)ds = \frac{r(\xi)}{q(\xi)} \int_y^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)ds = \frac{r(\xi)}{q(\xi)} \int_y^x P'(s)ds$$

$$= \frac{r(\xi)}{q(\xi)}\left[P(x) - P(y)\right], \text{ onde } \xi \in [y,x].$$

(como $\frac{r}{q}$ é limitada em $[a,b]$)

iv) De iii) segue que a integral imprópria ②

$\int_a^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds$ converge. Além disso, como se $x,y \in]a,b[$

$$m \int_y^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)\,ds \leq \int_y^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds \leq M \int_y^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)\,ds$$

onde agora m e M são o valor mínimo e máximo de

$\frac{r(s)}{q(s)}$ em $[a,x]$ obtemos, quando $y \to a+$

$$m \int_a^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)\,ds \leq \int_a^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds \leq M \int_a^x \frac{q(s)P(s)}{p(s)}\,ds$$

Novamente, do Teor. do valor Intermediário; existe $\xi \in [a,x]$ tq

$$\int_a^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds = \frac{r(\xi)}{p(\xi)} \int_a^x \frac{q(s)}{p(s)} P(s)\,ds = \frac{r(\xi)}{q(\xi)} \left[P(x) - P(a) \right]$$

$$\overset{(ii)}{=} \frac{r(\xi)}{p(\xi)} P(x)$$

Suponhamos que $y(x)$ é solução limitada de $(*)$

Então

$$P(x)\,y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds \; .$$

Fazendo $x \to a+$ e usando i) e iv), obtemos

$$y(x_0) = - \int_{x_0}^a \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds = \int_a^{x_0} \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds$$

Portanto

$$y(x) = \frac{1}{P(x)} \left[\int_a^{x_0} \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds + \int_{x_0}^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds \right] = \frac{1}{P(x)} \int_a^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds$$

é a única "candidata" a solução limitada.

Vamos mostrar que $\lim_{x \to a+} y(x) = \frac{r(a)}{q(a)}$ (em particular, y é limitada)

De fato, temos, por iv), para todo $x \in]a,b[$.

$$y(x) = \frac{1}{P(x)} \int_a^x \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds = \frac{r(\xi)}{p(\xi)} \quad , \xi \in [a,x].$$

e o resultado segue da continuidade de $\frac{r(\xi)}{p(\xi)}$.

Finalmente, se $y(x_0) \neq \int_a^{x_0} \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds$, podemos escolher $\bar{x} \in]a, x_0]$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$y(x_0) - \int_x^{x_0} \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds > \varepsilon \quad (\text{ou} < -\varepsilon) \text{ para } x \in]a, \bar{x}[.$$

Então, para $x \in]a, \bar{x}[$, temos

$$y(x) = \frac{1}{P(x)} \left[y(x_0) - \int_x^{x_0} \frac{r(s)}{p(s)} P(s)\,ds \right] > \frac{\varepsilon}{P(x)} \quad \left(\text{ou} < \frac{-\varepsilon}{P(x)}\right)$$

Daí:

$$\lim_{x \to a+} y(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty).$$