MAT 5798 - Medida e Integração

3ª Prova - 17 de junho de 2010

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________

Número USP : ____________________

Assinatura : ____________________

É permitido consultar o texto "Real and Complex Analysis" de Rudin.

1ª Questão. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \lambda)$ espaços de medida σ-finitos e seja $1 < p < \infty$. Mostre que, se f é uma função não-negativa e $\mu \times \lambda$-mensurável definida em $X \times Y$, então temos

$$\left(\int \left(\int f(x,y)\, d\mu_x\right)^p d\lambda_y\right)^{1/p} \leq \int \left(\int f(x,y)^p\, d\lambda_x\right)^{1/p} d\mu_y$$

Sugestão: Note que, no caso em que X tem apenas dois pontos e μ é a medida de contagem, esta afirmação corresponde à desigualdade de Minkowski. Tente imitar a demonstração da desigualdade de Minkowski a partir da desigualdade de Hölder, usando o teorema de Fubini no lugar do fato de que a integral da soma é a soma das integrais.

2ª Questão. Sejam μ e λ medidas positivas σ-finitas, definidas em um mesmo espaço mensurável, tais que $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$. Mostre que $L^p(\mu)$ e $L^p(\lambda)$ são isométricos, $1 \leq p < \infty$.

Sugestões: Use o teorema de Radon-Nikodym. Leia no Rudin o final da demonstração de que o dual de L^p é L^q.

3ª Questão. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função mensurável à Lebesgue.

(a) Mostre que o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < f(x)\}$ é mensurável à Lebesgue e tem medida igual à integral de f.

(b) Mostre que o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}$ é mensurável à Lebesgue e tem medida nula.

4ª Questão. Sejam $\mathfrak{M}$ a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e m a medida de Lebesgue. Defina a medida complexa λ por

$$\lambda(E) = m(E \cap [-1, +1]) - i\delta(E) + \int_E \frac{1}{1+x^2}\, dx, \quad E \in \mathfrak{M},$$

onde δ denota a medida de Dirac concentrada em 0. Determine a medida λ_s e a função h que correspondem a λ pelo Teorema 6.9 do Rudin (com $\mu = m$, lembrando que o teorema vale também para λ complexa e μ σ-finita).

Notação: Se $f \in L^1(m)$, denotamos $\int_E f\, dm$ por $\int_E f(x)\, dx$.