Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

MAT 111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Turma 45 - Primeira Prova - 4 de abril de 2003

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Questão 1 (1,5 ponto) (a) Verifique que a derivada de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

é positiva em todos os pontos onde está definida.

(b) Verifique que a derivada de

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

é negativa em todos os pontos onde está definida.

Solução: (a)

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot x - \sqrt{x^2-4}}{x^2} = \frac{x^2-(x^2-4)}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}} > 0,$$

para todo x tal que $|x| > 2$.

(b)

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0,$$

para todo $x \neq (-1)$.

Questão 2 (2 pontos) (a) Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}.$$

(b) Calcule os limites laterais

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3}{\sqrt{9r^2-r^4}-3r} \quad \text{e} \quad \lim_{r\to 0^-} \frac{r^3}{\sqrt{9r^2-r^4}-3r}$$

Solução: (a)

$$\frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} = \frac{x^{-1}(1+x^{-3})}{x^{-2}(1-x^{-1})} = x\cdot\frac{1+x^{-3}}{1-x^{-1}}.$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-3}}{1-x^{-1}} = \frac{1+0}{1-0} = 1,$$

temos, então,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty.$$

(b) Usando que

$$\sqrt{r^2} = \begin{cases} r, & \text{se } r>0 \\ -r, & \text{se } r<0 \end{cases},$$

vemos que:

$$\frac{r^3}{\sqrt{9r^2-r^4}-3r} = \begin{cases} \frac{r^2}{(\sqrt{9r^2-r^4})/r-3} = \frac{r^2}{\sqrt{9-r^2}-3} = \frac{r^2(\sqrt{9-r^2}+3)}{(9-r^2)-9} = -\sqrt{9-r^2}-3, & \text{se } r>0 \\ \frac{r^2}{(\sqrt{9r^2-r^4})/r-3} = -\frac{r^2}{\sqrt{9-r^2}+3}, & \text{se } r<0 \end{cases}.$$

Daí:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3}{\sqrt{9r^2-r^4}-3r} = -\sqrt{9}-3 = -6$$

e

$$\lim_{r\to 0^-} \frac{r^3}{\sqrt{9r^2-r^4}-3r} = -\frac{0}{\sqrt{9}+3} = 0.$$

Questão 3) (2,5 pontos) (a) Determine constantes reais a, b e c tais que

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja derivável para todo x, e tais que $f'(0) = 0$.

(b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.

(c) Esboce, em uma mesma figura, o gráfico de f e a reta encontrada no item "b".

Solução: (a) Sejam p e q as funções deriváveis $p(x) = ax^2 + bx + c$ e $q(x) = x^2 - 5x + 6$. Como $f(x) = p(x)$ se $x < 1$, e $f(x) = q(x)$ se $x \geq 1$, segue do Problema 2a da Segunda Lista (resolvido em sala) que:

(1) $f(x)$ será derivável para todo $x \neq 1$, qualquer que seja a escolha de a, b e c.

(2) $f(x)$ será derivável em $x = 1$ se, e somente se, $p(1) = q(1)$ e $p'(1) = q'(1)$.

A condição (2) acima é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a + b = -3 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Logo, f será derivável em todos os pontos se, e somente se,

$$a = -\frac{3}{2}, \; b = 0, \text{e } c = \frac{7}{2}.$$

(b) A equação da reta pedida é

$$\frac{y - f(1)}{x - 1} = f'(1),$$

isto é, $y - 2 = (-3)(x - 1)$, ou $y = 5 - 3x$.

(c) Veja a solução dada em sala e disponível na xerox do IME.

Questão 4) (2,5 pontos) (a) Dada $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$, mostre que

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{|x|}\sin\sqrt{|x|}}{2x}\,, \text{ se } x \neq 0.$$

(b) Existe $f'(0)$? Por quê?

Solução: (a) Para todo $x > 0$, $f(x) = \cos\sqrt{x}$. Logo, para todo $x > 0$, temos:

$$f'(x) = -(\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2x} = -\frac{\sqrt{|x|}\sin\sqrt{|x|}}{2x}.$$

Para todo $x < 0$, $f(x) = \cos\sqrt{-x}$. Logo, para todo $x < 0$, temos:

$$f'(x) = -\sin\sqrt{-x}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{-x}) = -\sin\sqrt{-x}\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot\frac{d}{dx}(-x) = (\sin\sqrt{|x|})\frac{1}{2\sqrt{|x|}} = -\frac{\sqrt{|x|}\sin\sqrt{|x|}}{2x},$$

pois, se $x < 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} = -\frac{\sqrt{|x|}}{x}.$$

(b) Como f é par, $f'(0)$ seria igual a zero, se existisse. Em particular, seria então nulo o limite lateral

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{|h|}-1}{h}$$

Provaremos que $f'(0)$ não existe mostrando que o limite lateral acima não é igual a zero.

Para todo $h > 0$, temos:

$$\frac{\cos\sqrt{|h|}-1}{h} = \frac{\cos\sqrt{h}-1}{(\sqrt{h})^2} = \frac{(\cos\sqrt{h}-1)\cdot(\cos\sqrt{h}+1)}{(\sqrt{h})^2\cdot(\cos\sqrt{h}+1)} = -\left(\frac{\sin\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\right)^2\frac{1}{\cos\sqrt{h}+1}$$

Quando h tende a zero, $\sqrt{h}$ tende a zero e, portanto, o limite desta última expressão é igual a

$$-\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t+1} = -\frac{1}{2}$$

Isto prova que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

como queríamos.

Questão 5) (1,5 ponto) Mostre que, se existe uma constante C tal que $|f(x)| \leq Cx^2$ para todo x em um intervalo aberto contendo 0, então f é derivável em $x = 0$. Quanto vale, então, a derivada?

Solução: Como $|f(0)| \leq C0^2$, então $f(0) = 0$.

Queremos calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Segue da hipótese que

$$0 \leq \left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq Ch^2.$$

Segue então do "Teorema do Confronto" que

$$0 = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Isto prova que $f'(0)$ existe e é igual a zero.

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

MAT 111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Turma 45 - Primeira Prova - 4 de abril de 2003

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Questão 1 (1,5 ponto) (a) Verifique que a derivada de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$$

é positiva em todos os pontos onde está definida.

(b) Verifique que a derivada de

$$g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

é positiva em todos os pontos onde está definida.

Solução:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} \cdot x - \sqrt{x^2-3}}{x^2} = \frac{x^2-(x^2-3)}{x^2\sqrt{x^2-3}} = \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-3}} > 0,$$

para todo x tal que $|x| > \sqrt{3}$.

(b)

$$f'(x) = \frac{(1-x)-(-1)(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0,$$

para todo $x \neq 1$.

Questão 2 (2 pontos) (a) Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1} - x^{-4}}{x^{-2} + x^{-3}}.$$

(b) Calcule os limites laterais

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r} \quad \text{e} \quad \lim_{r\to 0^-} \frac{r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r}$$

Solução: (a)

$$\frac{x^{-1} - x^{-4}}{x^{-2} + x^{-3}} = \frac{x^{-1}(1 - x^{-3})}{x^{-2}(1 + x^{-1})} = x \cdot \frac{1 - x^{-3}}{1 + x^{-1}}.$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^{-3}}{1 + x^{-1}} = \frac{1-0}{1+0} = 1,$$

temos, então,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1} - x^{-4}}{x^{-2} + x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty.$$

(b) Usando que

$$\sqrt{r^2} = \begin{cases} r, & \text{se } r > 0 \\ -r, & \text{se } r < 0 \end{cases},$$

vemos que:

$$\frac{r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r} = \begin{cases} \frac{r^2}{(\sqrt{4r^2 - r^4})/r - 2} = \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2} - 2} = \frac{r^2(\sqrt{4 - r^2} + 2)}{(4 - r^2) - 4} = -\sqrt{4 - r^2} - 2, & \text{se } r > 0 \\ \frac{r^2}{(\sqrt{4r^2 - r^4})/r - 2} = -\frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2} + 2}, & \text{se } r < 0 \end{cases}.$$

e, portanto,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r} = -\sqrt{4} - 2 = -4$$

e

$$\lim_{r\to 0^-} \frac{r^3}{\sqrt{4r^2 - r^4} - 2r} = -\frac{0}{\sqrt{4} + 2} = 0.$$

Questão 3) (2,5 pontos) (a) Determine constantes reais a, b e c tais que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 6, & \text{se } x < (-1) \\ ax^2 + bx + c, & \text{se } x \geq (-1) \end{cases}$$

seja derivável para todo x, e tais que $f'(0) = 0$.

(b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = (-1)$.

(c) Esboce, em uma mesma figura, o gráfico de f e a reta encontrada no item “b”.

Solução: (a) Sejam p e q as funções deriváveis $p(x) = ax^2 + bx + c$ e $q(x) = x^2 + 5x + 6$. Como $f(x) = p(x)$ se $x \geq (-1)$, e $f(x) = q(x)$ se $x < (-1)$, segue do Problema 2a da Segunda Lista (resolvido em sala) que:

(1) $f(x)$ será derivável para todo $x \neq (-1)$, qualquer que seja a escolha de a, b e c.
(2) $f(x)$ será derivável em $x = (-1)$ se, e somente se, $p(-1) = q(-1)$ e $p'(-1) = q'(-1)$.

A condição (2) acima é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ -2a + b = 3 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Logo, f será derivável em todos os pontos se, e somente se,

$$a = -\frac{3}{2},\ b = 0, \text{e } c = \frac{7}{2}.$$

(b) A equação da reta pedida é

$$\frac{y - f(-1)}{x + 1} = f'(-1),$$

isto é, $y - 2 = 3(x + 1)$, ou $y = 5 + 3x$.

(c) Veja a solução dada em sala e disponível na xerox do IME.

Questão 4) (2,5 pontos) (a) Dada $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$, mostre que

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{|x|}\sin\sqrt{|x|}}{2x}\,,\ \text{se } x \neq 0.$$

(b) Existe $f'(0)$? Por quê?

Solução: (a) Usando que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x}\,, \forall x \neq 0,$$

vem:

$$\frac{d}{dx}\cos\sqrt{|x|} = -\sin\sqrt{|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\cdot\frac{|x|}{x} = -\frac{\sqrt{|x|}\sin\sqrt{|x|}}{2x}\,, \forall x \neq 0.$$

(b) Temos:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\cos\sqrt{|h|}-1}{h} = \frac{\cos^2\sqrt{|h|}-1}{h(\cos\sqrt{|h|}+1)} = -\frac{\sin^2\sqrt{|h|}}{h(1+\cos\sqrt{|h|})},$$

isto é:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} -\left(\frac{\sin\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos\sqrt{|h|}}, & \text{se } h > 0 \\ \left(\frac{\sin\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos\sqrt{|h|}}, & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{1+\cos\sqrt{|h|}} = \frac{1}{2},$$

obtemos:

$$-\frac{1}{2} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2}$$

Logo, f não é derivável em $x = 0$.

Questão 5) (1,5 ponto) Mostre que, se existe uma constante C tal que $|f(x)| \leq Cx^2$ para todo x em um intervalo aberto contendo 0, então

> f é derivável em $x = 0$. Quanto vale, então, a derivada?

Solução: Como $|f(0)| \leq C0^2$, então $f(0) = 0$.

Queremos calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Como

$$\frac{f(h)}{h} = h \cdot \frac{f(h)}{h^2}$$

e, por hipótese,

$$\left|\frac{f(h)}{h^2}\right| \leq C,$$

temos, então, que $f(h)/h$ é igual ao produto de algo que tende a zero quando h tende a zero, multiplicado por algo limitado; daí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Logo, f é derivável em $x = 0$, e $f'(0) = 0$.