

MAT-111 – IME-USP – 1º Sem. 2003

4ª Lista de Exercícios

- (1) Mostre que $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \sin(\ln x)$, $x > 0$, são soluções da equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

- (2) Resolva o Problema 9d da Lista 2 do Cálculo 1 da Poli (disponível em www.ime.usp.br/~martha/mat2453/ e na xerox do Bloco B do IME).
- (3) Seja C a curva de equação $x^3 + y^3 - 9xy = 0$, e seja $P(x_0, y_0)$ um ponto dessa curva.

(a) Supondo que C coincide com o gráfico de uma função derivável $y(x)$ numa vizinhança do ponto P , prove que $(3y_0^2 - 9x_0)y'(x_0) = 9y_0 - 3x_0^2$.

(b) Mostre que $3y_0^2 - 9x_0 = 9y_0 - 3x_0^2 = 0$ se, e somente se, $x_0 = y_0 = 0$.

(c) Mostre que, se $3y_0^2 - 9x_0 = 0$ e se $P \neq (0, 0)$, então C não coincide com o gráfico de uma função derivável numa vizinhança de P .

(d) Ache as coordenadas do ponto A da figura 2.37 do Thomas.
Resposta: $A(3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}, 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}})$.

Nota: Observando a figura, é fácil acreditar que C não coincide, numa vizinhança, com o gráfico de uma função derivável em apenas dois pontos: $(0, 0)$ e A . Isso é verdade. Assuma esse fato sem demonstração. Só com as ferramentas do Cálculo 1, ainda não é possível demonstrá-lo.