

**MAT 0226 - Equações Diferenciais I**  
**IME-USP, Segundo Semestre de 2008**  
**Primeira Lista**

**1** - Verifique que as funções  $y_1(x) = \cos(\ln x)$  e  $y_2(x) = \sin(\ln x)$ , definidas para  $x > 0$ , são soluções da equação  $x^2 y'' + xy' + y = 0$ .

**2** - Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, mostre que  $y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$  é solução do problema de valor inicial  $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ .

**3** - Ache todas as soluções, dando seus domínios máximos, das equações:

(a)  $y''' = x^2$ , (b)  $3y' + y = 2e^{-x}$ , (c)  $(x + 3y) - xy' = 0$ , (d)  $xy' = y$ .

**4** - (a) Dado  $y_0 \in \mathbb{R}$ , resolva o problema de valor inicial  $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$ .

(b) Esboce o gráfico de algumas soluções encontradas no item (a).

(c) Para que valores de  $y_0$  o problema de valor inicial  $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$  tem solução?

**5** - Mostre que os problemas de valor inicial abaixo têm infinitas soluções.

(a)  $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ , (b)  $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ .

**6** - Demonstre diretamente (sem invocar teoremas de existência e unicidade mais gerais) que, para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , o problema de valor inicial  $\begin{cases} y' = x|y| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  tem solução única. Esboce o gráfico de algumas soluções.

**7** - (a) Mostre que toda solução de  $x^2 y' + 2xy = 1$ , com  $x > 0$ , tende a zero quando  $x \rightarrow +\infty$ . (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo  $y(2) = 2y(1)$ .

**8** - (a) Mostre que toda solução de  $x^2 y' + 2xy = 0$ , com  $x > 0$ , tende a zero quando  $x \rightarrow +\infty$ . (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo  $y(2) = 2y(1)$ .

**9** - Uma *equação de Bernoulli* é uma equação da forma  $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f$  e  $g$  são funções contínuas definidas num intervalo aberto.

(a) Mostre que a mudança de variável  $z = y^{1-\alpha}$  transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear.

(b) Resolva:

(1)  $y' + y = xy^3$

(2)  $y' + \frac{y}{x} = y^{1/2}$

(3)  $y' = ay^{2/3} - by$