Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos

MAT 255 (Equações Diferenciais Parciais), 2ª Prova, 21 de fevereiro de 2006

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____

Professor: Severino Toscano do Rego Melo (IME-USP)

1ª Questão: (2,5 pts) Seja $\Omega = (0, \infty)$. Mostre que

$$\langle u, \phi \rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \phi^{(j)}(1/j) \;+\; \int_0^{1/10} x\phi(x)\, dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

define uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ache o suporte e o suporte singular de u.

2ª Questão: (2 pts) Mostre que existe pelo menos uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cuja restrição a $\{x \in \mathbb{R};\, x \neq 0\}$ é igual à função $f(x) = x^{-10}$. Há mais de uma? Ache o suporte e o suporte singular de uma tal u.

3ª Questão: (2 pts) Sejam u, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tais que $\partial_1 u = \partial_2 v = 0$, seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\Phi(x,t) = (x+t, x-t)$. Mostre que $w = u \circ \Phi + v \circ \Phi$ satisfaz $w_{tt} - w_{xx} = 0$.

4ª Questão: (2 pts) Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dada $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, mostre que existe uma única $\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ cuja restrição a Ω é igual a u e cujo suporte é igual ao de u. Vale a unicidade sem supor iguais os suportes?

5ª Questão: (1,5 pt) Seja $u = \mathtt{v.p.}\,\dfrac{1}{x}$ (o valor principal de $1/x$). Mostre que, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$(u * \phi)(a) \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-a|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{a-x}\, dx, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

O que nos garante que o segundo membro da igualdade acima, visto como função de a, pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$?