Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos

MAT 255 (Equações Diferenciais Parciais), 1ª Prova, 30 de janeiro de 2006

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____

Professor: Severino Toscano do Rego Melo (IME-USP)

1ª Questão: (1,5 pt) Ache todas as soluções do problema $\begin{cases} u_x^2 - 2u_x u_y + u_y^2 = 1 \\ u(s,s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2ª Questão: (1,5 pt) Mostre que toda função harmônica e limitada em $\mathbb{R}^n$ é constante.

3ª Questão: (1,5 pt) Seja $f \in C(\mathbb{R}^n)$ limitada, não-negativa em todos os pontos e não-nula em algum ponto. Mostre que, se $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ é limitada e satisfaz

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

então $u(x,t) > 0$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

4ª Questão: (1,5 pt) Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^2$. Mostre que, para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e para todo $a > 0$,

$$|u_x(x_0,y_0)| \leq \frac{4}{\pi a} \sup\{\, |u(x,y)|;\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2\}.$$

5ª Questão: (a) (0,5 pt) Seja S a esfera de centro x_0 e raio r em $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x - x_0| = r\}$. Dado $a > 0$, mostre que a área de $S \cap \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| \leq a\}$ é menor ou igual a $4\pi a^2$.

(b) (0,5 pt) Dada $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$, mostre que existe $C > 0$ tal que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\forall r > 0$, $\displaystyle\int_{|x-x_0|=r} |f(x)|\, dS_x < C$.

(c) (1,5 pt) Dadas $f \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$, seja u a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta_x u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Mostre que existe $k > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e para todo $t > 0$, $|u(x,t)| \leq k/t$.

6ª Questão: (2 pts) Dadas $a \in C([0,L] \times [0,T])$, $f \in C([0,L])$, g_1 e $g_2 \in C([0,T])$, mostre que existe no máximo uma função $u \in C^2((0,L) \times (0,T]) \cap C([0,L] \times [0,T])$ tal que

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a(x,t)u_x - u \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,T] \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,L] \\ u(0,t) = g_1(t) \text{ e } u(L,t) = g_2(t), \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Sugestão: Demonstre um princípio do máximo.