MAT 0226 - Equações Diferenciais I

3^a Prova - 5 de dezembro de 2008

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1: (2,5 pts) Dados $\omega > 0$ e $\nu_0 > 0$, seja $(\theta(t), \nu(t))$ a solução do PVI

$$\begin{cases} \theta' = \nu, & \theta(0) = 0 \\ \nu' = -\omega^2 \operatorname{sen}\theta, & \nu(0) = \nu_0 \end{cases}.$$

Admita que existe $a > 0$ tal que $\theta(a) = \pi$ e que o domínio maximal da solução é $\mathbb{R}$. Mostre que $\nu(t + 2a) = \nu(t)$ e $\theta(t + 2a) = \theta(t) + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Questão 2: (2,5 pts) Mostre que a solução nula do sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y + z^2 \\ y' = -x - y \\ z' = -z + (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} \end{cases}.$$

é assintoticamente estável.

Questão 3: (2,5 pts) Calcule $\exp(tA)$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 4: (2,5 pts) (a) Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$, $v \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $Av = \lambda v$. Mostre que $y(t) = e^{\lambda t} v$ é a solução do problema de valor inicial $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = v \end{cases}$.

(b) Mostre que a solução nula é uma solução instável do sistema $y' = Ay$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Encontre uma solução **real** periódica e não-nula de $y' = Ay$, com A denotando a mesma matriz do item b.