Questão 5: (4 pts) (a) Dado $k > 0$, seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ solução de $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}$ tal que $\phi(t) > 0$ e $\phi'(t) < 0$ para todo $t \in I$. Mostre que $\phi'(\phi^{-1}(x))^2 = \frac{2k}{x} + C$ para algum C real.

(b) Seja ϕ a solução de $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2} \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1 \end{cases}$.

Mostre que ϕ' é decrescente para $t \geq 0$ e que ϕ tende a zero em tempo finito.

(c) Mostre que o sistema $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{k\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ ($|\cdot|$ denota a norma euclideana), possui ao menos uma solução cujo intervalo maximal é da forma (ω_-, ω_+), com $\omega_+ \in \mathbb{R}$. Dica: procure uma solução da forma $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$.

(d) Será que o sistema do item anterior possui alguma solução com intervalo maximal igual a $\mathbb{R}$? Dica: Pode invocar as leis de Kepler. Se o fizer, justifique porque o mesmo argumento não implicaria que toda solução tem intervalo maximal igual a $\mathbb{R}$.

a) Seja $v(x) = \phi'(\phi^{-1}(x))$. $v(\phi(t)) = \phi'(t) \Rightarrow$

$$\frac{dv}{dx}(\phi(t))\cdot\phi'(t) = \phi''(t) = -\frac{k}{\phi(t)^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}(x)\cdot v(x) = -\frac{k}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{v(x)^2}{2} = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow v(x)^2 = \frac{2k}{x} + C$$

b) Seja I o domínio (maximal) de ϕ, seja $J = \{t \in I;\ \phi'(t) < 0\}$.
Como $t \mapsto \phi(t)$ é decrescente em J e $x \mapsto v(x)^2$ é decrescente em $\phi(J)$ (pois $v(x)^2 = \frac{k}{x} + C$, $k > 0$), segue que $\phi'(t)^2 = v(\phi(t))^2$ é crescente em J. Como $\phi'(t) < 0$ em J, segue que ϕ' é decrescente em J. Assim, $\phi' : \{t \in I;\ t \geq 0\} \to \mathbb{R}$ é uma função que, enquanto for negativa, é decrescente; e é negativa em vizinhança de zero. Logo ϕ' é decrescente em $\{t \in I;\ t \geq 0\}$.

Logo $\phi'(t) \leq \phi'(0) = -1$ $\forall t \geq 0$, $t \in I$.

Como $\phi(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ e $\phi(0) > 0$, temos $\phi(t) > 0$ $\forall t \in I$.

Daí, $0 < \phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)\,ds \leq 1 - t$ $\forall t \geq 0$, $t \in I$.

Como ϕ é decrescente para $t \geq 0$, se $I = (\omega_-, \omega_+)$, $L = \lim_{t \to \omega_+} \phi(t)$ existe e é maior ou igual a zero. Se fosse > 0 a solução ainda poderia ser estendida até ω_+, pois $\lim_{t \to \omega^+} \phi'(t)$ seria igual a $\frac{2k}{L} + C$ e um PVI com dados iniciais em ω_+ poderia ser resolvido. Logo, $\lim_{t \to \omega_+} \phi(t) = 0$. Como $0 < \phi(t) \leq 1 - t$, $\forall t \in I$, vem que $\omega_+ \leq 1$.