Questão 1: (2 pts) (a) Resolva o PVI $\begin{cases} y' = x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(b) Qual o domínio maximal da solução obtida no item (a)? Justifique!

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 y^2$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2\, dx$

$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^3}{3} + C \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \therefore \Longrightarrow C = -1$

$y(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x^3}{3}}$, $x \in (-\infty, \sqrt[3]{3})$

(b) O intervalo $(-\infty, \sqrt[3]{3})$ é maximal pois, se $\phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ fosse solução definida em intervalo $J \supsetneq (-\infty, \sqrt[3]{3})$, pela unicidade de solução do PVI, teríamos $\phi(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x^3}{3}}$ $\forall x \in (-\infty, \sqrt[3]{3})$. Logo, $\lim_{x \to \sqrt[3]{3}^-} \phi(x) = +\infty$. Absurdo, pois ϕ seria contínua em $\sqrt[3]{3}$.

Questão 2: (3 pts) (a) Seja M um espaço métrico completo e seja $F : M \to M$ uma contração. Dado $x_1 \in M$, mostre que a seqüência $x_n = F(x_{n-1})$, $n \geq 2$, converge.

(b) Mostre que o limite da seqüência construída no item "a" é o único ponto fixo de F.

(c) Seja M um espaço métrico completo e seja $G : M \to M$ tal que $G^{(k)} = G \circ G \circ \cdots \circ G$ (k vezes) é uma contração. Mostre que G tem um único ponto fixo.

(a) Seja $0 < \alpha < 1$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x,y)$ $\forall x, y \in M$.

Temos $d(x_3, x_2) = d(F(x_2), F(x_1)) \leq \alpha\, d(x_2, x_1)$. (F é contração)

Suponha $d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^{n-2} d(x_2, x_1)$. Então

$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \alpha\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1)$.

Por indução vem, portanto, $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1)$.

Para todo n, p, temos (desigualdade triangular):

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{j=1}^{p} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \leq d(x_2, x_1) \sum_{j=1}^{p} \alpha^{n+j-2}$$

$$= \alpha^{n-1} \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \frac{d(x_2, x_1)}{1-\alpha} \alpha^{n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Logo $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tq $n \geq n_0$ e $p \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Isto é, (x_n) é de Cauchy, logo converge, pois M é completo.

(b) $x_n \to x \Rightarrow F(x_n) = x_{n+1} \to x$. (1)

$\Downarrow$

$d(F(x_n), F(x)) \leq \alpha\, d(x_n, x) \longrightarrow 0$

Logo $F(x_n) \to F(x)$ (2)

Segue de (1) e (2) e da unicidade do limite que $F(x) = x$.

Se $F(y) = y$, $d(x,y) = d(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$ $\therefore$

$(1-\alpha)\, d(x,y) \leq 0$ $\therefore$ $d(x,y) \leq 0$ $\therefore$ $d(x,y) = 0$ $\therefore$ $x = y$.

$(1-\alpha)\, d(x,y) \leq$ ...

(c) Seja x o <u>único</u> ponto fixo de $G^{(k)}$, $G^{(k)}x = x$.
Então $G^{(k)}(Gx) = G(G^{(k)}x) = G(x)$. Logo Gx também é ponto fixo de $G^{(k)}$. Logo $Gx = x$. (existe ponto fixo de G).
Se y é ponto fixo de G, $G^{(2)}y = Gy = y$, etc. Logo y é ponto fixo de $G^{(k)}$. Logo $x = y$ (unicidade).

Questão 3: (3 pts) Sejam a e f funções contínuas em $I=(0,+\infty)$ e seja y uma solução qualquer de $y'+a(x)y=f(x)$.

(a) Mostre que, para todo $x_0 \in I$, $y(x)=y(x_0)e^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}f(t)\,dt$, onde $A(x)=\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$.

(b) Suponha que $a(x)>0$ para todo $x \in I$. Mostre que, dados x_0 e x em I, $x_0<x$, existe $\xi \in (x_0,x)$ tal que $\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}f(t)\,dt = \frac{f(\xi)}{a(\xi)}[e^{A(x)}-1]$. Dica: Use sem demonstrar que, se g e h são contínuas em $[a,b]$, então existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\int_a^b g(t)h(t)\,dt = g(\xi)\int_a^b h(t)\,dt$. $\boxed{h \geq 0}$

(c) Suponha que $a(x) \geq c > 0$ para todo $x \in I$ e que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. Mostre que, para todo $\epsilon>0$, existe $x_0 \in I$ tal que $x>x_0 \Longrightarrow |y(x)| \leq |y(x_0)|e^{-A(x)}+\epsilon$.

(d) Sob as mesmas hipóteses do item anterior, mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$.

(a) $y'+a(x)y=f(x) \Rightarrow e^{A(x)}y'+a(x)e^{A(x)}y=e^{A(x)}f(x)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{A(x)}y(x)\right]=e^{A(x)}f(x) \Rightarrow e^{A(x)}y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}f(t)\,dt$

$\Rightarrow y(x)=y(x_0)e^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}f(t)\,dt \quad (1).$

(b) Dados $x>x_0$ em I, pela Dica, existe $\xi \in (x_0,x)$ tal que

$\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}a(t)\frac{f(t)}{a(t)}\,dt = \frac{f(\xi)}{a(\xi)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}a(t)\,dt$

$= \frac{f(\xi)}{a(\xi)}\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}e^{A(t)}\,dt = \frac{f(\xi)}{a(\xi)}\left[e^{A(x)}-1\right]$

(c) Como $\left|\frac{f(x)}{a(x)}\right| \leq \frac{|f(x)|}{c}$, também temos $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a(x)}=0$

Daí, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, x_0$ tq $\xi>x_0 \Rightarrow \left|\frac{f(\xi)}{a(\xi)}\right|<\varepsilon$.

Além disso, $x>x_0 \Rightarrow A(x)>0 \Rightarrow 0<\frac{e^{A(x)}-1}{e^{A(x)}}<1$

$\Rightarrow \left|e^{-A(x)}\frac{f(\xi)}{a(\xi)}\left[e^{A(x)}-1\right]\right|<\varepsilon$ (2). Segue a desigualdade pedida aplicando a triangular a (1), e depois (2).

(d) $x > x_0 \Rightarrow A(x) \geq \int_{x_0}^{x} c\,dt = c(x - x_0) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{-A(x)} = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe x_1

tq $x > x_1 \Rightarrow |y(x_0)e^{-A(x)}| < \varepsilon$. Daí, se $x > \max\{x_1, x_0\}$

$|y(x)| \leq |y(x_0)e^{-A(x)}| + \varepsilon < 2\varepsilon$. CQD.

Questão 4: (4 pts) (a) Encontre as soluções constantes de $y' = (y^2-1)(y^2-4)$.

(b) Mostre que, se I é intervalo aberto, $0 \in I$, e se $y : I \to \mathbb{R}$ é solução de $\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2-4) \\ y(0) = 0 \end{cases}$,

então $|y(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Dica: Use unicidade.

(c) Seja $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R}$, um intervalo aberto e seja $y : I \to \mathbb{R}$ uma solução do PVI acima. Mostre que o limite lateral $\lim_{x\to b^-} y(x)$ existe e que $-1 < \lim_{x\to b^-} y(x) < +1$.

(d) Qual o intervalo maximal da solução do PVI acima?

(a) $y \equiv k \Rightarrow y' = 0$. Logo $y \equiv k$ é solução $\Longleftrightarrow (k^2-1)(k^2-4) = 0$

Logo $y \equiv 1$, $y \equiv -1$, $y \equiv 2$, $y \equiv -2$ são as soluções constantes.

(b) Suponha que existe $d \in I$ tq $y(d) \geq 1$. Usando o TVI caso $y(d) > 1$, temos que $\exists\, \xi \in I$ tq $y(\xi) = 1$. A unicidade de solução do PVI $\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2-4) \\ y(\xi) = 1 \end{cases}$ implica

que $y(x) = 1$ $\forall x \in I$. Absurdo, pois $y(0) = 0$.

Analogamente demonstra-se que $\nexists\, d \in I$ tq $y(d) \leq 1$.

(c) $-1 < y(x) < 1 \Rightarrow y'(x) = (y(x)^2 - 1)(y(x)^2 - 4) > 0$.

Logo $y'(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$. Logo y é crescente e limitada em (a, b). Logo $\lim_{x\to b^-} y(x) = \sup_{x \in (a,b)} y(x)$.

Como $-1 < y(x) < 1$ $\forall x \in (a, b)$, $-1 < \sup_{x\in(a,b)} y(x) \leq 1$.

Se $\sup_{x\in(a,b)} y(x) = \lim_{x\to b^-} y(x) = 1$, então $\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \in (a, b) \\ 1, & x = b \end{cases}$

seria solução do PVI $\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2-4) \\ y(b) = 1 \end{cases}$. Pela unicidade,

$\tilde{y} \equiv 1$. Mas $y(x) < 1$ se $x \in I$, absurdo! Logo $\lim_{x\to b^-} y(x) < 1$

(d) Sejam I e y como no item c. A função $\tilde{y}$ é solução do PVI dado definida em $(a, b]$. Como o intervalo maximal é aberto, ele tem de ser, portanto, da forma $(a, +\infty)$. Analogamente, $(a, +\infty)$ não pode ser maximal a menos que $a = -\infty$.
Logo, o int. max. é $\mathbb{R}$.