MAT 0226 - Equações Diferenciais I

1^a Prova - 19 de setembro de 2008

Questão 1: (2 pts) (a) Resolva o PVI $\begin{cases} y' = x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(b) Qual o domínio maximal da solução obtida no item (a)? Justifique!

Questão 2: (3 pts) (a) Seja M um espaço métrico completo e seja $F : M \to M$ uma contração. Dado $x_1 \in M$, mostre que a seqüência $x_n = F(x_{n-1})$, $n \geq 2$, converge.

(b) Mostre que o limite da seqüência construída no item "a" é o único ponto fixo de F.

(c) Seja M um espaço métrico completo e seja $G : M \to M$ tal que $G^{(k)} = G \circ G \circ \cdots \circ G$ (k vezes) é uma contração. Mostre que G tem um único ponto fixo.

Questão 3: (3 pts) Sejam a e f funções contínuas em $I = (0, +\infty)$ e seja y uma solução qualquer de $y' + a(x)y = f(x)$.

(a) Mostre que, para todo $x_0 \in I$, $y(x) = y(x_0)e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt$, onde $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$.

(b) Suponha que $a(x) > 0$ para todo $x \in I$. Mostre que, dados x_0 e x em I, $x_0 < x$, existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que $\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\, dt = \frac{f(\xi)}{a(\xi)}[e^{A(x)} - 1]$. Dica: Use sem demonstrar que, se g e h são contínuas em $[a, b]$, $h(x) \geq 0$ para todo x, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que $\int_a^b g(t)h(t)\, dt = g(\xi) \int_a^b h(t)\, dt$.

(c) Suponha que $a(x) \geq c > 0$ para todo $x \in I$ e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Mostre que, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in I$ tal que $x > x_0 \implies |y(x)| \leq |y(x_0)|e^{-A(x)} + \epsilon$.

(d) Sob as mesmas hipóteses do item anterior, mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Questão 4: (4 pts) (a) Encontre as soluções constantes de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 4)$.

(b) Mostre que, se I é intervalo aberto, $0 \in I$, e se $y : I \to \mathbb{R}$ é solução de $\begin{cases} y' = (y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, então $|y(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Dica: Use unicidade.

(c) Seja $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R}$, um intervalo aberto e seja $y : I \to \mathbb{R}$ uma solução do PVI acima. Mostre que o limite lateral $\lim_{x\to b^-} y(x)$ existe e que $-1 < \lim_{x\to b^-} y(x) < +1$.

(d) Qual o intervalo maximal da solução do PVI acima?