MAT 0226 - Equações Diferenciais I
IME-USP, Segundo Semestre de 2008
Segunda Lista

1 - Sejam p, q e r funções contínuas sobre $a \leq x \leq b$ tais que $p(a) = p(b) = 0$, $p(x) > 0$ se $a < x < b$, $q(x) > 0$ se $a \leq x \leq b$ e

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{dx}{p(x)} = \int_{b-\epsilon}^{b} \frac{dx}{p(x)} = \infty \quad (0 < \epsilon < b - a)$$

Demonstre que todas as soluções da equação

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

(que existem sobre o intervalo $a < x < b$) convergem para $\frac{r(b)}{q(b)}$ quando $x \to b$. Mostre que uma destas soluções converge para $\frac{r(a)}{q(a)}$ quando $x \to a$, enquanto as outras divergem a $+\infty$ ou $-\infty$.

2 - Dada a equação diferencial $y' + a(x)y = f(x)$, onde a e f são funções contínuas definidas num intervalo não-limitado à direita, $a(x) \geq c > 0$ $\forall x$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mostre que toda solução tende a zero quando $x \to \infty$.

3 - Seja a uma constante positiva e seja $\lim_{x\to 0^+} f(x) = b$. Mostre que a equação

$$xy' + ay = f(x)$$

tem uma única solução limitada quando $x \to 0^+$ e ache o limite desta solução quando $x \to 0^+$.

4 - (a) Mostre que a equação $y' + y = f(x)$ tem uma única solução limitada para $-\infty < x < \infty$, dado que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada. [Sugestão: considere a solução $\phi_A(x)$ com $\phi_A(-A) = 0$, e tome $\phi(x) = \lim_{A\to\infty} \phi_A(x)$].

(b) Supondo que a função f do item (a) é periódica, mostre que a solução obtida acima é periódica. [Sugestão: faça uma mudança de variável na integral].

5 - Exercício 7 da Seção 2.4 de Figueiredo-Neves.

6 - Exercício 8 da Seção 2.4 de Figueiredo-Neves.

7 - Exercício 13 da Seção 2.4 de Figueiredo-Neves.