MAT 0226 - Equações Diferenciais I
IME-USP, Segundo Semestre de 2008
Primeira Lista

1 - Verifique que as funções $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$, definidas para $x > 0$, são soluções da equação $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2 - Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,dt$ é solução do problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

3 - Ache todas as soluções, dando seus domínios máximos, das equações:
(a) $y''' = x^2$, (b) $3y' + y = 2e^{-x}$, (c) $(x + 3y) - xy' = 0$, (d) $xy' = y$.

4 - (a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$.
(b) Esboce o gráfico de algumas soluções encontradas no item (a).
(c) Para que valores de y_0 o problema de valor inicial $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tem solução?

5 - Mostre que os problemas de valor inicial abaixo têm infinitas soluções.
(a) $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

6 - Demonstre diretamente (sem invocar teoremas de existência e unicidade mais gerais) que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = x|y| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tem solução única. Esboce o gráfico de algumas soluções.

7 - (a) Mostre que toda solução de $x^2y' + 2xy = 1$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

8 - (a) Mostre que toda solução de $x^2y' + 2xy = 0$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

9 - Uma *equação de Bernoulli* é uma equação da forma $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e f e g são funções contínuas definidas num intervalo aberto.
(a) Mostre que a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear.
(b) Resolva:

(1) $y' + y = xy^3$
(2) $y' + \dfrac{y}{x} = y^{1/2}$
(3) $y' = ay^{2/3} - by$