FÓRMULA DE TAYLOR
USP – MAT 2110 – 2015

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

1. Polinômios de Taylor

A reta tangente ao gráfico de uma função f derivável em um ponto a define a função de primeiro grau que `melhor` aproxima a função em pontos próximos de a. Vamos dar uma definição precisa do significado da palavra"melhor" nesta frase e generalizar os conceitos e resultados para polinômios de grau arbitrário.

1.1. **Polinômio de Taylor de ordem** 1.

Seja f uma função derivável em a e suponha que P_1 seja um polinômio de grau menor ou igual a 1 satisfazendo a seguinte condição:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=0 \tag{1}$$

Então, temos:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-P_1(x)]=\lim_{x\to a}\left[(x-a)\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}\right]=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=0\cdot 0=0. \tag{2}$$

Como f e P_1 são funções contínuas em a, temos

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}P_1(x)=P_1(a).$$

Sendo P_1 um polinômio de grau menor ou igual a 1 que vale $f(a)$ em $x=a$, ele pode ser escrito como $P_1(x)=A(x-a)+f(a)$, para alguma constante A. Vamos agora determinar o valor de A. Para tanto, re-escrevemos o limite em (1) como

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-A\right]=f'(a)-A.$$

Logo, para que (1) seja satisfeita, necessariamente $A=f'(a)$.

Vemos assim que o único polinômio de grau menor ou igual a 1 que satisfaz (1) é

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Note que $P_1(a)=f(a)$ e $P_1'(a)=f'(a)$ e que $y=P_1(x)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$.

Dizemos que P_1 é o "polinômio de Taylor de ordem 1 da função f em torno de a". Uma maneira de indicar que P_1 depende de f e de a seria denotar P_1 por $P_1^{f,a}$. Embora mais precisa, essa notação, de tão pesada, acabaria dificultando a leitura. Vamos usar a notação mais simples, indicando no contexto qual é a função que é aproximada por P_1 e em torno de qual ponto se dá essa aproximação.

1.2. **Polinômio de Taylor de ordem 2.**

Supondo que a derivada de f esteja definida em um intervalo contendo a e que a segunda derivada de f exista em a, vamos agora procurar um polinômio de grau menor ou igual a 2 que satisfaça

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=0 \tag{3}$$

Ou seja, queremos que, quando x tende a a, a diferença $f(x)-P_2(x)$ tenda a zero tão rapidamente que continue indo a zero mesmo se dividida por $(x-a)^2$. O polinômio P_2 será chamado de "polinômio de Taylor de ordem 2 da função f em torno de a". Pode ser tentador dar um nome para a parábola $y=P_2(x)$ (algo como "a parábola grudadíssima" ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$), mas ninguém faz isso.

Qualquer polinômio de grau menor ou igual a 2, $P_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, pode ser escrito como

$$P_2(x)=A(x-a)^2+B(x-a)+C \quad (A=\alpha,\ B=2a\alpha+\beta,\ C=a^2\alpha+a\beta+\gamma).$$

Vamos determinar os valores de A, B e C que tornam a afirmação (3) verdadeira.

Se P_2 satisfaz (3), então P_2 satisfaz também (1) (isso decorre de um cálculo semelhante ao que fizemos em (2)). Daí, temos

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[-\frac{A(x-a)^2}{x-a}+\frac{f(x)-B(x-a)-C}{x-a}\right]=0+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-B(x-a)-C}{x-a}$$

logo, $\tilde{P}_1(x)=B(x-a)+C$ satisfaz (1) e, portanto, $\tilde{P}_1=P_1$, ou seja, $C=f(a)$ e $B=f'(a)$. Daí, vem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}-A\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}-A=\frac{f''(a)}{2}-A=0,$$

ou seja, $A=f''(a)/2$ (na segunda passagem, usamos a regra de L'Hôspital).

Vemos assim que, para um polinômio P_2 satisfazer (3), é necessário que

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2. \tag{4}$$

Também é verdade que este P_2 de fato satisfaz (3). Isso pode ser verificado por meio de um cálculo direto. Alternativamente, refletindo sobre os argumentos que usamos para mostrar que (3) implica (4), vemos que (4) também implica (3).

Em resumo, mostramos que o polinômio P_2 definido em (4) é o único polinômio de grau menor ou igual a 2 que satisfaz (3). Note que $P_2(a)=f(a)$, $P_2'(a)=f'(a)$ e $P_2''(a)=f''(a)$

1.3. **Polinômio de Taylor de ordem 3.**

Vamos agora, supondo que a segunda derivada de f esteja definida em um intervalo contendo a e que a terceira derivada de f exista em a, procurar um polinômio de grau menor ou igual a 3 que satisfaça

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_3(x)}{(x-a)^3}=0 \tag{5}$$

Ou seja, queremos que, quando x tende a a, a diferença $f(x)-P_3(x)$ tenda a zero tão rapidamente que continue indo a zero mesmo se dividida por $(x-a)^3$. O polinômio P_3 será chamado de "polinômio de Taylor de ordem 3 da função f em torno de a".

Qualquer polinômio de grau menor ou igual a 3, $P_3(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, pode ser escrito como

$P_3(x) = A(x-a)^3+B(x-a)^2+C(x-a)+D$ $(A = \alpha,\ B = 3a\alpha+\beta,\ C = 3a^2\alpha+2a\beta+\gamma,\ D = a^3\alpha+a^2\beta+a\gamma+\delta)$.

Vamos determinar os valores de A, B, C e D que tornam a afirmação (5) verdadeira.

Se P_3 satisfaz (5), então P_3 satisfaz também (3) (isso decorre de um cálculo semelhante ao que fizemos em (2)). Daí, temos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_3(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \left[-\frac{A(x-a)^3}{(x-a)^2} + \frac{f(x) - B(x-a)^2 - C(x-a) - D}{(x-a)^2} \right] =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - B(x-a)^2 - C(x-a) - D}{(x-a)^2} = 0$$

logo, $\tilde{P}_2(x) = B(x-a)^2 + C(x-a) + D$ satisfaz (3) e, portanto, $\tilde{P}_2 = P_2$, ou seja, $D = f(a)$, $C = f'(a)$ e $B = f''(a)/2$. Daí, vem:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_3(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^3} - A \right] =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2} - A = \lim_{x\to a} \frac{f''(x) - f''(a)}{6(x-a)} - A = \frac{f'''(a)}{6} - A = 0,$$

ou seja, $A = f'''(a)/6$ (em duas passagens, usamos a regra de L'Hôspital).

Vemos assim que, para um polinômio P_3 satisfazer (5), é necessário que

(6) $$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3.$$

Também é verdade que este P_3 de fato satisfaz (5). Isso pode ser verificado por meio de um cálculo direto. Alternativamente, refletindo sobre os argumentos que usamos para mostrar que (5) implica (6), vemos que (6) também implica (5).

Em resumo, mostramos que o polinômio P_3 definido em (6) é o único polinômio de grau menor ou igual a 3 que satisfaz (5). Note que $P_3(a) = f(a)$, $P_3'(a) = f'(a)$, $P_3''(a) = f''(a)$ e $P_3'''(a) = f'''(a)$.

1.4. **Polinômio de Taylor de ordem n.**

Queremos agora generalizar os três casos acima para um inteiro arbitrário n. Relendo o que fizemos, dá para notar que provamos um pouco mais do que afirmamos explicitamente. Provamos, para $n \le 3$:

(7) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Teorema 1. *Suponha que f é uma função possuindo as derivadas de ordem menor do que n definidas em um intervalo I que contém o ponto a e que a n-ésima derivada $f^{(n)}(a)$ existe. Então*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(convencionamos que $f^{(0)} = f$ e $0! = 1$) é o único polinômio de grau menor ou igual a n satisfazendo

(8) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O polinômio P_n é chamado de "polinômio de Taylor de ordem n da função f em torno de a". Note que $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $0 \le k \le n$.

O Teorema 1 se demonstra por indução sobre n, incluindo na hipótese de indução que também a segunda das duas equações em (7) é satisfeita para cada n. Isso será usado para a função f', no cálculo do coeficiente do termo de maior grau de P_n (assim, basta aplicar uma vez a Regra de L'Hôspital; poderíamos ter usado esse argumento já no caso $n = 3$, em vez de ter aplicado duas vezes a Regra).

Outro ingrediente importante é que qualquer polinômio de grau menor ou igual a n pode ser escrito, de maneira única, como $A_n(x-a)^n + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + A_1(x-a) + A_0$.

2. Estimativa do erro

Sabemos que P_n, o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a, é o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de a, no sentido de ser ele o único polinômio de grau menor ou igual a n que satisfaz (8), ou seja, que a diferença entre ele e f tende a zero, quando x tende a a, mais rápido do que $(x-a)^n$. Esta é a chamada "forma infinitesimal"de estimar o "erro" $f - P_n$. Para algumas aplicações, esta informação já é suficientemente útil. Mas às vezes é necessário obter mais precisas "estimativas globais", válidas em todos os pontos de um intervalo que contenha a.

Os teoremas desta seção exigem hipóteses mais fortes do que as do Teorema 1. Pedimos que a $(n+1)$-ésima derivada de f esteja definida e seja contínua em todos os pontos de um intervalo I contendo o ponto a. Diz-se de uma tal função que ela é "`de classe` C^{n+1} `em` I".

Teorema 2. *Seja f uma função de classe C^{n+1} em um intervalo I que contém o ponto a. Suponha que $f^{(n+1)}$ seja limitada em I, isto é, suponha que existe uma constante $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Seja P_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a. Então a estimativa*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{9}$$

é satisfeita por todo $x \in I$.

Usaremos o Teorema 2 em exemplos na próxima seção. Ele é consequência do (mais preciso) teorema seguinte.

Teorema 3. *Seja f uma função de classe C^{n+1} em um intervalo I que contém o ponto a. Seja P_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a. Então a igualdade*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\, ds \tag{10}$$

é verdadeira para todo $x \in I$.

`Demonstração`: Para $n = 0$, a fórmula (10) se reduz ao Teorema Fundamental do Cálculo:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx.$$

Para provar (10) para $n = 1$ aplicamos ao lado direito da igualdade a fórmula de integração por partes

$$\int_a^x u(s)v'(s)\, ds = u(s)v(s)\Big|_a^x - \int_a^x u'(s)v(s)\, ds, \tag{11}$$

fazendo $u(s) = x - s$, $v'(s) = f''(s)$, $u'(s) = -1$ e $v(s) = f'(s)$:

$$\int_a^x (x-s)f''(s)\, ds = (x-s)f'(s)\Big|_a^x + \int_a^x f'(s)\, ds = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a).$$

Isto prova (10) para $n = 1$.

O caso geral demonstra-se por indução sobre n. Suponhamos que (10) foi demonstrada para $n-1$ e apliquemos (11) ao lado direito de (10), fazendo $u(s) = (x-s)^n$, $v'(s) = f^{(n+1)}(s)$, $u'(s) = -n(x-s)^{n-1}$ e $v(s) = f^{(n)}(s)$. Isso e a hipótese de indução fornecem:

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds = \frac{1}{n!}(x-s)^n f^{(n)}(s)\Big|_a^x + \frac{n}{n!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds =$$

$$-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + f(x) - P_{n-1}(x) = f(x) - P_n(x),$$

como queríamos demonstrar.

O Teorema 2 segue do Teorema 3 e do seguinte lema, aplicado a $g = f^{(n+1)}$.

Lema 1. *Seja g uma função contínua definida em um intervalo I satisfazendo $|g(x)| \leq M$ para alguma constante M e para todo $x \in I$. Dados a e x em I e um inteiro $n \geq 0$, temos*

$$\left|\int_a^x (x-s)^n g(s)\,ds\right| \leq \frac{M}{n+1}|x-a|^{n+1}.$$

`Demonstração`: Suponhamos primeiro que $x > a$. Então, para todo s no domínio de integração, $(x-s)^n \geq 0$. Daí, vem:

$$\left|\int_a^x (x-s)^n g(s)\,ds\right| \leq \int_a^x (x-s)^n |g(s)|\,ds \leq M\int_a^x (x-s)^n\,ds = -M\left.\frac{(x-s)^{n+1}}{n+1}\right|_a^x = M\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

como queríamos.

No caso em que $a > x$, fazendo a mudança de variável $\sigma = x + a - s$ na integral, vem:

$$\int_a^x (x-s)^n g(s)\,ds = (-1)^{n+1}\int_x^a (a-\sigma)^n g(x+a-\sigma)\,d\sigma.$$

Agora podemos aplicar o caso já demonstrado do Lema à função $\tilde{g}(\sigma) = g(x+a-\sigma)$, com a no lugar de x e x no lugar de a. Isso conclui a demonstração.

3. Exemplos

Todos os exemplos desta seção serão de polinômios de Taylor em torno de 0 (ou seja, o "a"das duas seções anteriores será igual a zero). Esta escolha não se caracteriza como uma perda grave de generalidade, pois uma mudança de variíveis transforma o caso geral no caso $a = 0$. O exemplo mais canônico é o da função $g(x) = \ln x$, $x > 0$. É fácil determinar as derivadas de todas as ordens de g em $x = 1$ e assim escrever os polinômios de Taylor de g em torno de 1. Em vez disso, encontraremos os polinômios de Taylor de $f(x) = \ln(x+1)$ em torno de $x = 0$.

Exemplo 1. Seja $f(x) = \ln(1+x)$, $x > 0$. Para cada inteiro positivo n, temos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\; f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\; f^{(4)}(x) = -\frac{2.3}{(1+x)^4},\; \cdots\; f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

e, daí, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$. Assim, usando que $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, temos que o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de 0 é dado por:

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Para todo $x \geq 0$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq n!$. Segue então do Teorema 2 aplicado ao ponto $a = 0$ e ao intervalo $I = [0, +\infty)$:

$$\left|\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right]\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad \text{para todo } x > 0. \tag{12}$$

Fazendo, por exemplo, $x = 1$ nesta fórmula, vem

$$\left|\ln 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]\right| < \frac{1}{n+1}, \quad \text{para todo inteiro positivo } \; n. \tag{13}$$

O lado direito de (13) tende a zero quando n tende a infinito. Logo, a soma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ fica tão próxima de $\ln 2$ quanto se queira, desde que n seja suficientemente grande. Isso se denota por

$$\ln 2 \; = \; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Esta fórmula pode ser belíssima, mas a estimativa (13) não é uma ferramenta eficiente para se aproximar $\ln 2$ por números racionais. Se a gente quiser, por exemplo, três casas decimais corretas, é preciso calcular uma soma de mil parcelas. Uma maneira mais rápida de se obter aproximações racionais do logaritmo de números positivos é sugerida abaixo, em um exercício logo após o Exemplo 7

Exemplo 2. Para cada inteiro $l \geq 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2l+1$ e de ordem $2l+2$ da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, em torno de 0 são iguais:

$$P_{2l+1}(x) = P_{2l+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Usando o Teorema 2 com $n = 2l+2$, e lembrando que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ para todo n e para todo x, vem:

$$\left|\operatorname{sen} x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\right]\right| \leq \frac{|x|^{2l+3}}{(2l+3)!}, \quad \text{para todo } \; l \in \mathbb{N}, \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}.$$

Compare o que obtivemos aqui com o Problema 10d da Lista 2 da Poli (http://www.ime.usp.br/mat/2453-2015/2015L2.pdf).

Exemplo 3. Para cada inteiro $l \geq 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2l$ e de ordem $2l+1$ da função $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, em torno de 0 são iguais:

$$P_{2l}(x) = P_{2l+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Seguindo uma linha de argumentos muito parecida com a do Exemplo 2, pode-se mostrar que

$$\left|\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}\right]\right| \leq \frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)!}, \quad \text{para todo } \; l \in \mathbb{N}, \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4. Seja $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $x > -1$. O polinômio de Taylor de ordem 4 de f em torno de 0 é

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4.$$

Mais geralmente, para cada inteiro $n > 0$, usando que

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \; f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \; f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\cdots, f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)(1+x)^{\frac{1}{2} - n}, \tag{14}$$

vemos que o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de 0 é dado pela expressão

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k,$$

em que $\binom{\frac{1}{2}}{k}$, $0 \leq k \leq n$, denota o chamado "coefiiciente binomial"

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\right].$$

`Exercício`: (a) Encontre o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = (1+x)^{1/4}$ em torno de $x = 0$.
(b) Sem usar calculadora, encontre inteiros p e q tais que $\left|\sqrt[4]{80} - \frac{p}{q}\right| < 10^{-3}$. Confira o resultado com a ajuda de uma máquina de calcular.

Exemplo 5. O polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}.$$

Usando que $0 < f(x) \leq 1$ para todo $x \leq 0$ e aplicando o Teorema 2 para o intervalo $I = (-\infty, 0]$, segue que

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{para todo} \quad x \leq 0.$$

Usando que $0 < f(x) \leq e^M$ para todo $x \leq M$ e $M > 0$, e aplicando o Teorema 2 para o intervalo $I = [0, M]$, segue que

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq e^M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{para todo} \quad x \leq M.$$

Fazendo $M = 1$ e $x = 1$ nesta desigualdade e usando que $e < 3$, vem:

$$\left|e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Esta desigualdade permite aproximar e por racionais com precisão arbitrariamente pequena, por exemplo,

$$\left|e - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\right| = \left|e - \frac{8}{3}\right| < \frac{1}{8}.$$

`Exercício`: Sem usar calculadora, encontre inteiros p e q tais que $\frac{p}{q} < e < \frac{p}{q} + 10^{-5}$. Use máquina de calcular para conferir o resultado.

Nos próximos exemplos, vamos usar as seguintes propriedades da integral (que, na verdade, já usamos na demonstração do Lema 1):

- Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

A motivação para estudar o exemplo seguinte vem da teoria das probabilidades. A "densidade de probabilidade"de uma "distribuição normal"(para certos valores dos paramêtros que a definem) é dada pela função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6. Nosso objetivo agora é calcular valores aproximados de $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Vimos no Exemplo 5 que, para todo inteiro postivo n e para todo $x < 0$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x),$$

sendo que o "erro" $E_n(x)$ satisfaz $|E_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Substituindo $t = -\frac{x^2}{2}$ nestas afirmações, vem:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 2!} - \frac{t^6}{2^3 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^n n!} + \tilde{E}_n(t), \quad |\tilde{E}_n(t)| = |E_n(-t^2/2)| \le \frac{t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!},$$

daí

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 2!} - \frac{t^6}{2^3 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^n n!}\right] dt + \int_0^x \tilde{E}_n(t)\,dt \\ &= \left[1 - \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^n \cdot n!}\right] + \epsilon_n(x).\end{aligned}$$

Supondo $x > 0$ para facilitar (não se perde nada com essa restrição, pois $\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$), podemos estimar o erro $\epsilon_n(x)$ por

$$|\epsilon_n(x)| = \left|\int_0^x \tilde{E}_n(t)\,dt\right| \le \int_0^x |\tilde{E}_n(t)|\,dt \le \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\,dt = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)\cdot 2^{n+1}\cdot (n+1)!}.$$

Fazendo, por exemplo, $x = 1$ e $n = 2$, vem:

$$\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1 - \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2\cdot 2!} + \delta = \frac{103}{120} + \delta, \quad (\delta = \epsilon_2(1)),$$

sendo

$$|\delta| \le \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} = \frac{1}{336}.$$

Podemos conferir o resultado usando o WolframAlpha, que dá $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0,855624....$ A diferença entre este valor e $\frac{103}{120} = 0,858333...$ é menor do que $0,00271$, que é menor do que $\frac{1}{336}$, o que confirma nossa estimativa.

Exemplo 7. (Exemplo 1 revisitado.) Seja n um inteiro positivo. Substituindo $a = -t$ na identidade $\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$, $a \ne 1$, obtém-se:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}, \quad \text{para todo} \quad t \ne -1.$$

Integrando esta identidadade de 0 a x, vem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt, \quad \text{para todo} \quad x > -1. \tag{15}$$

Para cada $x > 0$, o "erro" $\ln(1+x) - [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}]$ é positivo se n é par e negativo se n é ímpar, seu valor absoluto satisfaz

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt < \int_0^x t^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

e, portanto,

$$\left|\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right]\right| \le \frac{n!}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad \text{para todo} \quad x > 0. \tag{16}$$

(re-obtivemos assim (12)).

Para $-1 < x < 0$, fazendo a mudança de variável $s = -t$ na integral, vem

$$(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = -\int_0^{-x} \frac{s^n}{1-s}\,ds = -\int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}\,ds$$

e, daí, o "erro"é negativo para todo n, seu valor absoluto satisfaz

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}\,ds \le \frac{1}{1-|x|}\int_0^{|x|} s^n\,ds = \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)(n+1)}$$

e, daí,

$$\left|\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right]\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)(n+1)}, \quad \text{se} \quad -1 < x < 0. \tag{17}$$

Segue de (16) e de (17), por confronto,:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right]}{x^n}=0.$$

Assim re-encontramos, sem usar a fórmula de Taylor, o único polinômio de grau menor ou igual a n que satisfaz (8) para $f(x)=\ln(1+x)$ e $a=0$.

`Exercício`: (a) Usando que $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}+\dfrac{t^n}{1-t}$, para todo $t\neq 1$, mostre que

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt,$$

para todo $x<1$. (b) Fazendo $n=2l$, l inteiro positivo, e somando a equação (15) à equação obtida no item anterior, mostre que

$$\ln\frac{1+x}{1-x}-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2l-1}}{2l-1}\right)=\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{1-t^2}\,dt,\quad -1<x<1.$$

(c) Fazendo $x=\frac{1}{3}$, escolha l tal que $\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{1-t^2}\,dt$ fique menor do que 10^{-3} (Dica: se $0\le t\le\frac{1}{3}$, então $\frac{1}{1-t^2}\le\frac{9}{8}$).
(d) Sem usar máquina, encontre inteiros p e q tais que $\frac{p}{q}<\ln 2<\frac{p}{q}+10^{-3}$.

Exemplo 8. Seja n um inteiro positivo. Substituindo $a=-t^2$ na identidade $\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n$, $a\neq 1$, obtém-se:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2},\quad \text{para todo}\quad t\in\mathbb{R}.$$

Integrando esta identidade de 0 a x, vem

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt,\quad \text{para todo}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Defina

$$P_{2n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Daí, para cada $x>0$,

$$|f(x)-P_{2n+1}(x)|=\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt<\int_0^x t^{2n+2}\,dx=\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

e, portanto,

$$|f(x)-P_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},\quad \text{para todo}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Segue que

(18) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-P_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}}=0.$$

Pelo Teorema 1, existe um único polinômio de grau menor ou igual $2n+2$ satisfazendo (18). É ele o polinômio de Taylor de ordem $2n+2$ de $f(x)=\arctan x$ em torno de 0 (que, sendo ele um polinômio de grau $2n+1$, é igual também ao polinômio de Taylor de ordem $2n+1$ de f em torno de 0). Isto é, temos a seguinte igualdade de polinômios:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Decorre, então, que todas as derivadas de ordem par de $f(x)=\arctan x$ são nulas em $x=0$ (o que não é novidade, pois toda função ímpar tem esta propriedade) e, para todo inteiro positivo n, $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$.