Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Para cada inteiro $n \geq 1$, defina $a_n = f(n)$ e

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - \int_1^n f(x)\,dx.$$

A sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente:

$$A_{n+1} - A_n = a_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \int_1^n f(x)\,dx = a_n - \int_n^{n+1} f(x)\,dx > 0,$$

pois $f(x) > a_n$ se $n-1 \leq x < n$. Mostremos agora que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

$$A_n = a_1 - \left(\int_1^2 f(x)\,dx - a_2\right) - \left(\int_2^3 f(x)\,dx - a_3\right) - \cdots - \left(\int_{n-2}^{n-1} f(x)\,dx - a_{n-1}\right) - \int_{n-1}^n f(x)\,dx. \tag{1}$$

Como cada expressão entre parêntesis é positiva, vem

$$A_n < a_1 - \int_{n-1}^n f(x)\,dx < a_1 - a_{n-1} < a_1$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} A_n \leq a_1 = f(1). \tag{2}$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ é a célebre *constante de Euler*, denotada por γ. Provamos portanto que $\gamma \leq 1$. Como a_n tende a zero, podemos somar a A_n o valor de a_n que o valor do limite não se altera. Obtemos assim

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

A estimativa $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \leq f(1)$ obtida em (2) será melhorada se exibirmos números positivos menores do que uma (ou algumas) das expressões entre parêntesis em (1). Temos, por exemplo,

$$\int_1^2 f(x)\,dx - a_2 = \int_1^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^2 f(x)\,dx - f(2) =$$

$$\left(\int_1^{3/2} f(x)\,dx - \frac{f(3/2)}{2}\right) + \left(\int_{3/2}^2 f(x)\,dx - \frac{f(2)}{2}\right) + \frac{f(3/2)}{2} + \frac{f(2)}{2} - f(2) < \frac{f(3/2) - f(2)}{2}.$$

Daí vem $A_n < f(1) - \frac{f(3/2)-f(2)}{2} - a_{n-1}$, logo

$$\lim_{n\to\infty} A_n \leq f(1) - \frac{f(3/2) - f(2)}{2} \tag{3}$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, obtemos:

$$\gamma \leq \frac{11}{12}.$$

Obteremos agora uma cota inferior positiva para $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ supondo que mais uma hipótese é satisfeita por f: que ela possui derivada segunda e que $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$. Esta hipótese implica que qualquer segmento de reta com extremos no gráfico de f fica acima do gráfico de f. Daí, para cada n, a área que fica abaixo do gráfico de f, acima do eixo dos x e entre $x = n-1$ e $x = n$ é menor que a área do trapézio de vértices $(n-1, 0)$, $(n-1, a_{n-1})$, (n, a_n) e $(n, 0)$, isto é,

$$\int_{n-1}^n f(x)\,dx < \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \tag{4}$$

Este fato, que salta aos olhos como óbvio se fizermos uma figura, pode ser demonstrado integrando-se de $(n-1)$ a n os dois lados da desigualdade

$$f(x) < (a_n - a_{n-1})(x-n) + a_n, \qquad n-1 < x < n.$$

Usando (4) para minorar o lado direito da igualdade (1), vem:

$$A_n > a_1 - \left(\frac{a_1+a_2}{2} - a_2\right) - \left(\frac{a_2+a_3}{2} - a_3\right) - \cdots - \left(\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2} - a_{n-1}\right) - \frac{a_{n-1}+a_n}{2} =$$

$$= a_1 - \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right) - \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}\right) - \cdots - \left(\frac{a_{n-2}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2}\right) - \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{a_n}{2} = \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2}.$$

Passando ao limite (usando que $a_n \to 0$), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \ \geq \ \frac{f(1)}{2}.$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, obtemos:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}.$$

Estas duas últimas estimativas podem ser melhoradas se compararmos a área sob o gráfico de f entre dois inteiros consecutivos com a área de dois trapézios com vértices no gráfico em vez de apenas um. Assim, por exemplo,

$$\int_1^2 f(x)\,dx \ < \ \frac{f(1)+f(3/2)}{4} + \frac{f(3/2)+f(2)}{4}.$$

Usando esta estimativa para minorar a primeira expressão entre parêntesis em (1) e usando (4) para as demais, vem

$$A_n \ > \ \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2} - \left(\frac{f(1)+2f(3/2)+f(2)}{4} - \frac{f(1)+f(2)}{2}\right)$$

Tomando o limite, vem

$$\lim_{n\to\infty} A_n \geq \frac{3a_1}{4} + \frac{a_2}{4} - \frac{f(3/2)}{2}.$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, vem

$$\gamma \ \geq \ \frac{13}{24}.$$

$$\text{Em resumo:} \qquad \frac{13}{24} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \leq \frac{11}{12}$$