EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397$$

(em metros/segundo). Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas, em vez disso, da função aceleração. Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397) \\ &= 0{,}0011904t^2 - 0{,}05504t + 7{,}196 \end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0{,}0023808t - 0{,}05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0{,}05504}{0{,}0023808} \approx 23{,}12$$

Calculando o valor de $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, temos,

$$a(0) = 7{,}196 \qquad a(t_1) \approx 6{,}56 \qquad a(126) \approx 19{,}16$$

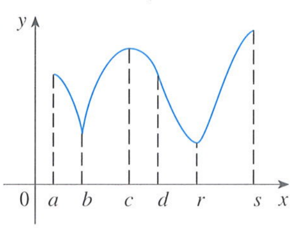
Assim, a aceleração máxima é cerca de $19{,}16$ m/s^2, e a aceleração mínima, cerca de $6{,}56$ m/s^2. □

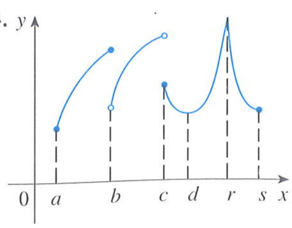
4.1 EXERCÍCIOS

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

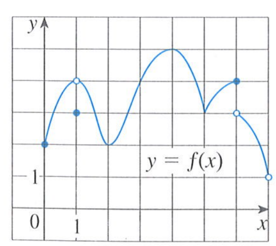
2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.
   (a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?
   (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

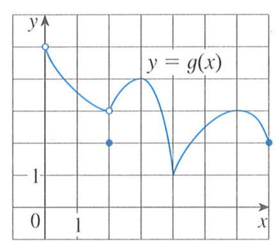
3–4 Para cada um dos números a, b, c, d, r e s, diga se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, um máximo ou mínimo local, ou nem máximo, nem mínimo.

3.


4.


5–6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.


6.


7–10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.

(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geq 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leq 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leq 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leq x \leq 2$

22. $f(x) = 1 + (x+1)^2, \quad -2 \leq x < 5$

23. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

24. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta, \quad -\pi/4 \leq \theta < \pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

29–44 Encontre os números críticos da função.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg}\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2} \ln x$

45–46 É dada uma fórmula para a derivada de uma função. Quantos números críticos ela tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0,1|x|} \operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100 \cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b, 0 \leq x \leq 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leq x \leq 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leq x \leq 0$

69. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

70. Um objeto com massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando tg $\theta = \mu$.

71. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre, 1993 e 2003, é dado pela função

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

onde t é medido em anos a partir de agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49. A tabela a seguir fornece os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

73. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde o ar expelido escoe. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação.

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2} r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

em que k é uma constante e r_0, o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2} r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2} r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

74. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas que g não tem um valor extremo local em 5.

75. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem nem máximos nem mínimos locais.

76. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

77. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso no qual f tenha um mínimo local em c.

78. Uma função cúbica é um polinômio de grau três; isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a \neq 0$.

(a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e esboços que ilustrem essas três possibilidades.

(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

4.2 EXERCÍCIOS

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad [0, 2]$

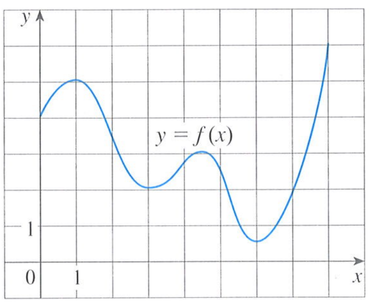
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela retangular $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela que f.
(c) Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então, faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e observe que ela é paralela à reta secante.

10. (a) Na janela retangular $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e de sua reta secante que passa pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.
(b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

18. Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tem exatamente uma raiz real.

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
(b) Mostre que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
(b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demonstre que $f(b) < g(b)$. [*Sugestão*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e derivável em toda a parte. Demonstre que para todo o número positivo b existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b$$

30. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Seja $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demonstre a identidade

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Às 2 horas da tarde o velocímetro de um carro mostrava 50 km/h, e às 2h10 mostrava 65 km/h. Mostre que em algum instante entre 2h e 2h10 a aceleração era exatamente 90 km/h^2.

35. Dois corredores iniciaram uma corrida no mesmo instante e terminaram empatados. Demonstre que em algum instante durante a corrida eles tiveram a mesma velocidade. [*Sugestão*: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, em que g e h são as funções posição dos dois corredores.]

36. Um número a é chamado **ponto fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

4.3 COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

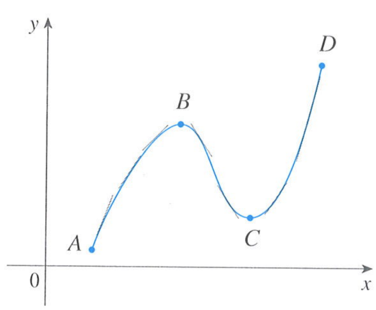


FIGURA 1

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva, logo $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa, portanto $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

■ Vamos abreviar o nome deste teste para Teste C/D.

TESTE CRESCENTE/DECRESCENTE OU TESTE C/D

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

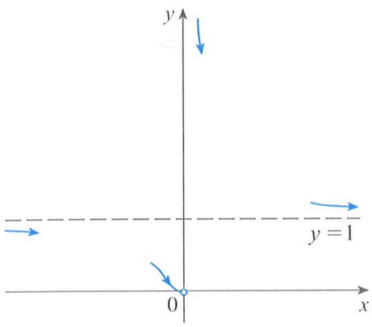
$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da Equação 1 é positivo, e

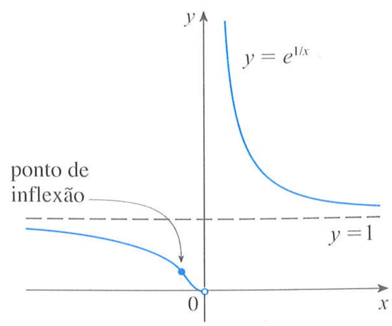
$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{2}$. Portanto, a curva é côncava para baixo em $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e côncava para cima em $(-\frac{1}{2}, 0)$ e em $(0, \infty)$. O ponto de inflexão é $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$.

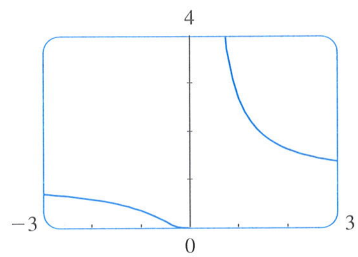
Para esboçar o gráfico de f, primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (como uma linha tracejada), junto com as partes da curva próxima da assíntota em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação relativa aos limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ como em $(0, \infty)$. Observe que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$ mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação relativa à concavidade e ao ponto de inflexão. Na Figura 13(c) verificamos nosso trabalho com uma ferramenta gráfica.



(a) Esboço preliminar



(b) Esboço acabado



(c) Confirmação computacional

FIGURA 13

□

4.3 EXERCÍCIOS

1–2 Use o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:

(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.

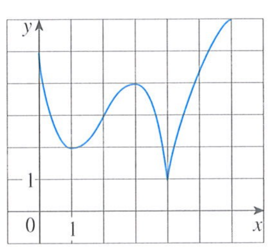
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.

(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.

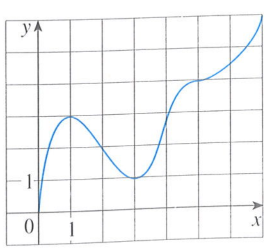
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.

(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.



3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.

(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?

(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?

(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.

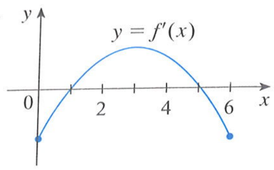
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5–6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.

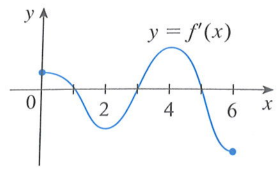
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?

(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

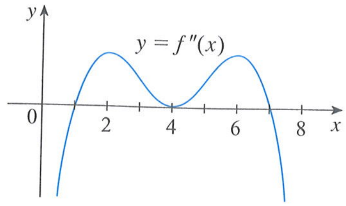
5.



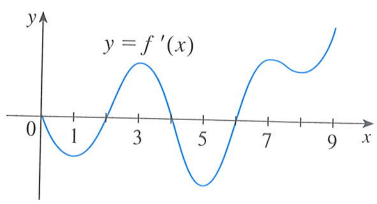
6.



7. O gráfico da segunda derivada f'' de uma função f está mostrado. Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.



8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
   (a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
   (b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.
   (c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
   (d) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

10. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2\,\text{sen}\, x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Primeira e Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
    (b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
    (c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
    (a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que se pode afirmar sobre f?
    (b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.

24. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, assíntota vertical $x = 1$,
    $f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$, $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
    $f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
    $f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
    $f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
    $f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
    $f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e ponto de inflexão em $(0,1)$

27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
    $f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $|x| \neq 2$

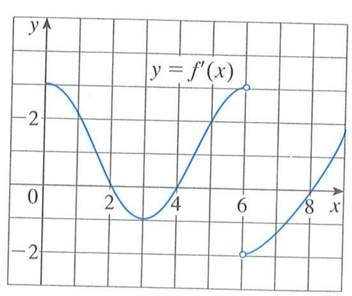
28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
    $f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
    $f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.

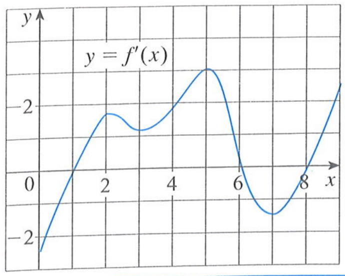
30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
    (a) Esboce um gráfico possível de f.
    (b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
    (c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrado.
   (a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
   (b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?
   (c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?
   (d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
   (e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44

(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.

(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

34. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

38. $h(x) = (x^2 - 1)^3$

39. $A(x) = x\sqrt{x+3}$

40. $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52

(a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.

(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.

(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.

(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

50. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56

(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.

(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

56. $f(x) = x^2e^{-x}$

57–58

(a) Use um gráfico de f para estimar aproximadamente os intervalos da concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.

(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

SCA **59–60** Estime os intervalos da concavidade com precisão de uma casa decimal usando um sistema de computação algébrica para calcular e fazer o gráfico de f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}^{-1} x}{1 + x^3}$

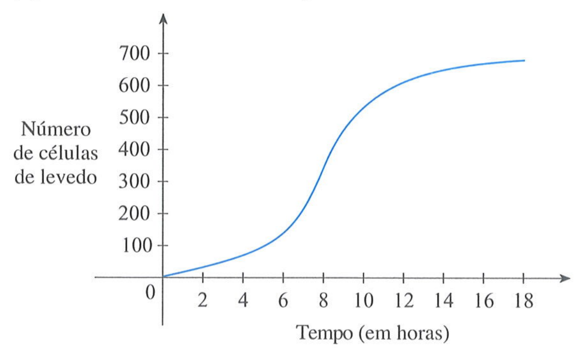
61. É dado o seguinte gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório em função do tempo.

(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.

(b) Quanto a taxa é mais alta?

(c) Em quais intervalos a função população é côncava para cima ou para baixo?

(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.



62. Seja $f(t)$ a temperatura no instante t onde você mora e suponha que no instante $t = 3$ você se sinta desconfortavelmente quente. Como você se sente em relação às informações dadas em cada caso?

(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$

(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$ (d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Seja $h(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. O que você acredita ser maior, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

64. A caneca mostrada na figura está sendo enchida com café a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual o significado do ponto de inflexão?

65. Uma *curva de resposta à droga* descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. Uma função onda $S(t) = At^p e^{-kt}$ é usada frequentemente para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga particular, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ e t for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e explique seu significado. Se você tiver uma ferramenta gráfica, use-a para traçar a curva de resposta à droga.

66. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante μ é denominada *média*, e a constante positiva σ é conhecida como *desvio-padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.

(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?

(c) Ilustre, fazendo o gráfico de quatro membros dessa família sobre a mesma tela.

67. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em -2 e um valor mínimo local 0 em 1.

68. Para quais valores dos números a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo $f(2) = 1$?

69. Mostre que a curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tem três pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

70. Mostre que as curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocam a curva $y = e^{-x}$ sen x em seu ponto de inflexão.

71. Suponha que f seja derivável em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todos os números x em I, exceto para um único número c. Demonstre que f é uma função crescente em todo o intervalo.

72–74 Suponha que todas as funções sejam duas vezes deriváveis e que as segundas derivadas nunca sejam nulas.

72. (a) Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncava para cima em I.

(b) Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

73. (a) Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que a função produto fg é côncava para cima em I.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que f e g sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que f seja crescente e g, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que fg pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

74. Suponha que f e g sejam ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições em f a função composta $h(x) = f(g(x))$ será côncava para cima?

75. Mostre que tg $x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) =$ tg $x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para demonstrar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Mostre que uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) tem sempre exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico possui três intersecções com o eixo x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum? Ilustre, fazendo o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico varia quando c decresce?

79. Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existir em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o Teste da Primeira Derivada e o Teorema de Fermat à função $g = f'$.]

80. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

81. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

82. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c?

83. Os três casos no Teste da Primeira Derivada cobrem as situações encontradas usualmente, mas não esgotam todas as possibilidades. Considere as função f, g e h cujos valores em 0 são todos 0 e, para $x \neq 0$

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

(a) Mostre que 0 é um número crítico de todas as três funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes em ambos os lados de 0.

(b) Mostre que f não tem nem um máximo nem um mínimo local em 0, que g tem um mínimo local e que h tem um máximo local.

4.4 FORMAS INDETERMINADAS E A REGRA DE L'HÔSPITAL

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Embora F não esteja definida quando $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* de 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em (1) exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0, e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode ou não existir e é denominado **forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$**. Encontramos alguns limites desse tipo no Capítulo 2. Para as funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Mas esses métodos não funcionam para limites tais como (1); de modo que nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como a *Regra de L'Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de F e precisamos calcular o limite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$. Há uma disputa entre o numerador e o denoquanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

(Lembre-se de que esses métodos foram usados na derivação dessas funções.) Em ambos os métodos somos levados a um produto indeterminado $g(x)\ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen } 4x)^{\cot x}$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \text{sen } 4x \to 1$ e $\text{cotg } x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Seja

$$y = (1 + \text{sen } 4x)^{\cot x}$$

Então $$\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \text{sen } 4x)$$

logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \text{sen } 4x)}{\text{tg } x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \text{sen } 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ □

■ O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

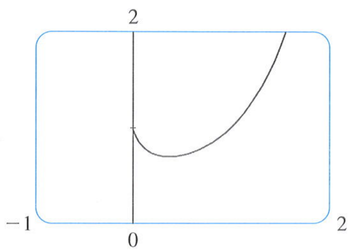


FIGURA 6

EXEMPLO 9 Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos proceder como no Exemplo 8 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$ □

4.4 EXERCÍCIOS

1–4 Dado que

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$

$\lim_{x\to a} p(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ **6.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$ **8.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen } x}$ **10.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{tg } 5x}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

12. $\lim_{t\to \pi} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$

14. $\lim_{t\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

15. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

33. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

34. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

38. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

39. $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

40. $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

41. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

42. $\lim_{x\to \infty} e^{-x} \ln x$

43. $\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\lim_{x\to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec x$

45. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$

46. $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{tg}(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

48. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

49. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

50. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x} \right)$

51. $\lim_{x\to \infty} (x - \ln x)$

52. $\lim_{x\to \infty} (xe^{1/x} - x)$

53. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

54. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$

55. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

56. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

57. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} \right)^x$

58. $\lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

59. $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

60. $\lim_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

61. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

62. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

63. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

64. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x + 1}$

65–66 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de L'Hôspital para encontrar o valor exato.

65. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} \right)^x$

66. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

67–68 Ilustre a Regra de L'Hôspital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

67. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

69. Demonstre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

70. Demonstre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

71. Mostre o que acontece se você tentar usar a regra de l´Hospital para calcular

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Calcule o limite usando outro método.

NÃO

72. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

em que g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de L'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

73. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros i capitalizado n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n \to \infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a regra de l´Hospital para mostrar que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

74. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

em que c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

75. Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Mostre que $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

76. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade v de um impulso elétrico no cabo é

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

em que c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

NÃO

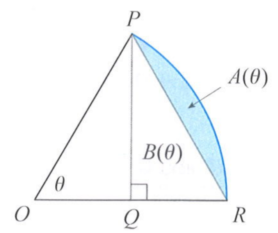
(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

77. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi no livro *Analyse des Infiniment Petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Este foi o primeiro *livro texto* de cálculo a ser publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a > 0$. (Naquela época era comum escrever aa em vez de a^2.) Resolva este problema.

78. A figura mostra um setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



79. Se f' for contínua, $f(2) = 0$ e $f'(2) = 7$, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

80. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

81. Se f' for contínua, use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

82. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

83. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens definidas em $\mathbb{R}$. [*Sugestão*: Mostre primeiro por indução que existe um polinômio $p_n(x)$ e um inteiro não negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

84. Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é derivável em 0 por meio de sucessivos *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é derivável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} \to 0 \text{ quando } x \to \pm\infty$$

Logo, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

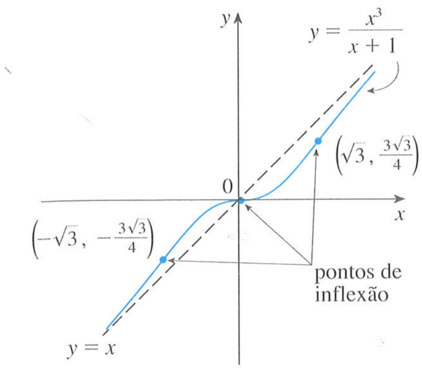


FIGURA 13

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x < \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13. □

4.5 EXERCÍCIOS

1–52 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x^4 + 4x^3$

6. $y = x(x+2)^3$

7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$

8. $y = 20x^3 - 3x^5$

9. $y = \dfrac{x}{x-1}$

10. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

11. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

15. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$

19. $y = x\sqrt{5-x}$

20. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

21. $y = \sqrt{x^2+x-2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x} - x$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

24. $y = x\sqrt{2-x^2}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

27. $y = x + 3x^{2/3}$

28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

29. $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

30. $y = \sqrt[3]{x^3+1}$

31. $y = 3\,\text{sen}\,x - \text{sen}^3 x$

32. $y = x + \cos x$

33. $y = x\,\text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

34. $y = 2x - \text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

35. $y = \frac{1}{2}x - \text{sen}\,x, \quad 0 < x < 3\pi$

36. $y = \sec x + \text{tg}\,x, \quad 0 < x < \pi/2$

37. $y = \dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}$

38. $y = \dfrac{\text{sen}\,x}{2+\cos x}$

39. $y = e^{\text{sen}\,x}$

40. $y = e^{-x}\,\text{sen}\,x, \quad 0 < x < \pi/2$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = e^{2x} - e^{x}$

43. $y = x - \ln x$

44. $y = e^{x}/x$

45. $y = (1 + e^{x})^{-2}$

46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

47. $y = \ln(\operatorname{sen} x)^2$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

52. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

53. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

54. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é

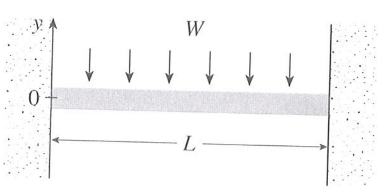
$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + h^2c^2/\lambda^2}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico nos diz sobre a energia?

55. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida entre paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

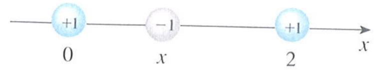
em que E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia da secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



56. A Lei de Coulomb afirma que a força de atração entre duas partículas carregadas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo das coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força resultante agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x - 2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

em que k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força resultante. O que o gráfico mostra sobre a força?



57–60 Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

57. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

58. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

59. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

60. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

61–66 Use o roteiro desta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua.

61. $y = \dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$

62. $y = \dfrac{x^2 + 12}{x - 2}$

63. $xy = x^2 + 4$

64. $y = e^{x} - x$

65. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

66. $y = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

67. Mostre que a curva $y = x - \operatorname{tg}^{-1} x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

68. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

69. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas oblíquas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

70. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é *assintótica* à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

71. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 70. Use então seus resultados para auxiliá-lo no esboço do gráfico de f.

72. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem seguir o roteiro de esboço de curvas desta seção.

4.6 EXERCÍCIOS

1–8 Obtenha gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Em particular, você deve usar os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

1. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 4x + 6$

2. $f(x) = 8x^5 + 45x^4 + 80x^3 + 90x^2 + 200x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2\,500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x + 5 \cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7 \cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

9–10 Obtenha gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Estime os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão, e use o cálculo para achar essas quantidades exatamente.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Use a Regra de L'Hôspital para explicar o comportamento quando $x \to 0$.

(c) Estime o valor mínimo e os intervalos de concavidade. Então, use o cálculo para achar os valores exatos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$

12. $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Esboce o gráfico à mão, usando as assíntotas e as intersecções com os eixos, mas não as derivadas. Então, use seu esboço como um roteiro na obtenção de gráficos (com uma ferramenta gráfica) que mostrem os aspectos mais importantes da curva. Use esses gráficos para estimar os valores máximo e mínimo.

13. $f(x) = \dfrac{(x + 4)(x - 3)^2}{x^4(x - 1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x + 3)^2(x - 2)^5}{x^3(x - 5)^2}$

SCA **15.** Se f for a função considerada no Exemplo 3, use um sistema de computação algébrica para calcular f' e então faça seu gráfico para confirmar que todos os valores máximos e mínimos são como dados no exemplo. Calcule f'' e use-a para estimar os intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

SCA **16.** Se f for a função do Exercício 14, encontre f' e f'' e use seus gráficos para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento e de concavidade de f.

SCA **17–22** Use um sistema de computação algébrica para fazer o gráfico de f e encontrar f' e f''. Utilize os gráficos dessas derivadas para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão de f.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)e^{\operatorname{arctg} x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}$

SCA **23–24**

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Explique a forma do gráfico calculando o limite quando $x \to 0^+$ ou quando $x \to \infty$.

(c) Estime os valores máximo e mínimo e então use o cálculo para achar os valores exatos.

(d) Use um gráfico de f'' para estimar a coordenada x dos pontos de inflexão.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

25. No Exemplo 4 consideramos um membro da família de funções $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que ocorre na síntese de FM. Aqui investigamos a função com $c = 3$. Comece fazendo o gráfico de f na janela de inspeção $[0, \pi]$ por $[-1{,}2,\ 1{,}2]$. Quantos pontos de máximo locais você pode ver? O gráfico tem mais informações do que podemos perceber a olho nu. Para descobrir os pontos de máximo e mínimo escondidos será necessário examinar muito cuidadosamente o gráfico de f'. De fato, ajuda examinar ao mesmo tempo o gráfico de f''. Encontre todos os valores máximos e mínimos e os pontos de inflexão. Então faça o gráfico de f na janela retangular $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1{,}2,\ 1{,}2]$ e comente sobre a simetria.

26–33 Descreva a mudança no gráfico de f à medida que c varia. Faça o gráfico de vários membros da família para ilustrar as tendências que você descobriu. Em particular, você deve investigar como os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão movem-se quando c varia. Você deve também identificar qualquer valor intermediário de c no qual o aspecto básico da curva mude.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

34. A família de funções $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e C são números positivos e $b > a$, tem sido usada para modelar a concentração de uma droga injetada no sangue no instante $t = 0$. Faça o gráfico de vários membros dessa família. O que eles têm em comum? Para valores fixos de C e a, descubra graficamente o que acontece à medida que b cresce. Use então o cálculo para demonstrar o que você descobriu.

35. Investigue a família de curvas dadas por $f(x) = xe^{-cx}$, em que c é um número real. Comece calculando os limites quando $x \to \pm\infty$. Identifique qualquer valor intermediário de c onde mude a forma básica. O que acontece aos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão quando c varia? Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família.

36. Investigue a família de curvas dadas pela equação $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comece determinando o valor de transição de c em que o número de pontos de inflexão muda. Faça então o gráfico de vários membros da família para ver quais formas são possíveis. Existe outro valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos muda. Tente descobrir isso graficamente. Demonstre então o que você descobriu.

37. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. Para quais valores de c a curva tem pontos de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo para cada curva da família estão sobre a parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre fazendo o gráfico dessa parábola e de vários membros da família.

38. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. Para que valores de c a curva tem pontos de máximo e de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo de cada curva da família estão sobre a curva $y = x - x^3$. Ilustre fazendo o gráfico dessa curva e de vários membros da família.

4.7 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos estudados neste capítulo para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção e na próxima vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Na solução desses problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios da resolução de problemas discutidos na página 65 e adaptá-los para estas situações:

PASSOS NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte a si mesmo: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos (a, b, c, ..., x, y) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo — por exemplo, A para área h para altura e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.

4.7 EXERCÍCIOS

1. Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.

(a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro Número	Segundo Número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

(b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

4. Encontre um número positivo tal que a soma do número e seu inverso seja tão pequena quanto possível.

5. Encontre as dimensões de um retângulo com um perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

6. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1 000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

7. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

em que k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

8. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

em que I é a intensidade da luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz P é máximo?

9. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para a área total.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

10. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza a notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para o volume.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

11. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

12. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem um volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

13. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

14. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa \$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

Sabemos que sen 2θ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo, $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Observe que essa solução trigonométrica não envolve derivação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui. □

APLICAÇÕES À ADMINISTRAÇÃO E À ECONOMIA

Na Seção 3.7 introduzimos a ideia de custo marginal. Lembre que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de um certo produto, então, o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função de custo.

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é chamada **função receita**. A derivada R' da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro. Nos Exercícios 53 a 58, lhe será pedido para usar as funções custo, receita e lucro marginais para minimizar custos e maximizar receitas e lucros.

EXEMPLO 6 Uma loja tem vendido 200 gravadores de DVD por semana a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada \$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

SOLUÇÃO Se x for o número de gravadores de DVD vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades, o preço diminui \$ 10. Assim, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$ 125. □

15. Faça o Exercício 14 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

16. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma área dada, aquele com um menor perímetro é um quadrado.
(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

17. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

18. Encontre o ponto sobre a reta $6x + y = 9$ que está mais próximo do ponto $(-3, 1)$.

19. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

20. Encontre, com precisão de duas casas decimais, as coodernadas do ponto na curva $y = \operatorname{tg} x$ que está mais próximo do ponto $(1, 1)$.

21. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

22. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

24. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 8 - x^2$.

25. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

26. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

27. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

28. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

29. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área de superfície possível para esse cilindro.

30. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. (Veja o Exercício 56 na página 14.) Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

31. As margens de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as margens laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

32. Um pôster deve ter uma área de 900 cm^2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

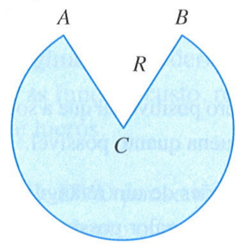
33. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

34. Responda o Exercício 33 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

35. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

36. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

37. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



38. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

39. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

40. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força será

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

em que μ é uma constante chamada coeficiente de atrito. Para que valor de θ F é menor?

41. Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor mínimo da potência?

42. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u $(u < v)$, então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

43. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh = \tfrac{3}{2}s^2\text{cotg}\ \theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\ \text{cossec}\ \theta$$

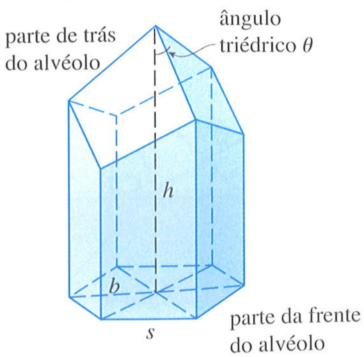
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

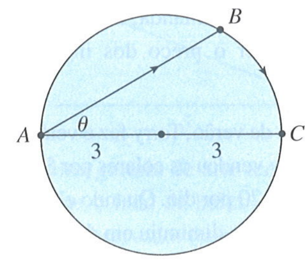
Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2°.



44. Um bote deixa uma doca às 2 horas da tarde e viaja na direção sul a uma velocidade de 20 km/h. Outro bote está indo para a direção leste a 15 km/h e atinge a mesma doca às 3 horas da tarde. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

45. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

46. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como deve proceder?



47. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400 000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800 000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

48. Suponha que a refinaria do Exercício 47 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

49. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

50. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

51. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

52. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

53. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

54. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

55. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço dos ingressos a \$ 10, a frequência média tem sido de 27 000. Quando os preços dos ingressos abaixaram para \$ 8, a frequência média aumentou para 33 000.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

56. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.

(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

57. Um fabricante tem vendido 1 000 aparelhos de televisão por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada \$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.

(a) Encontre a função demanda.

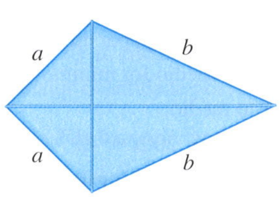
(b) Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?

(c) Se sua função custo semanal for $C(x) = 68\,000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?

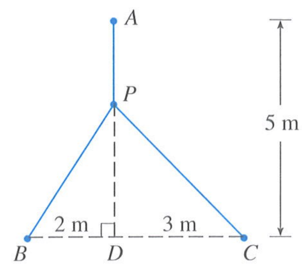
58. O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada \$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?

59. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

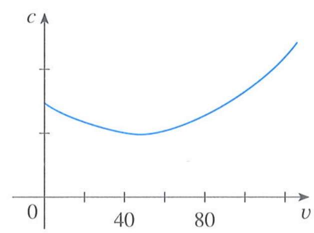
SCA **60.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



61. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo.



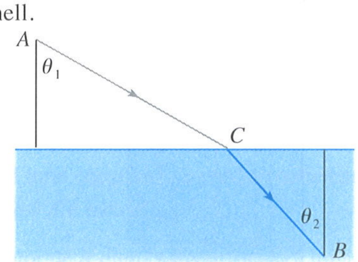
62. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetros*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



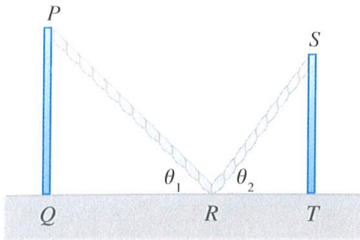
63. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

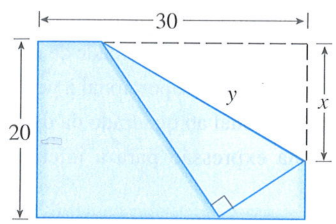
onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conformes mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.



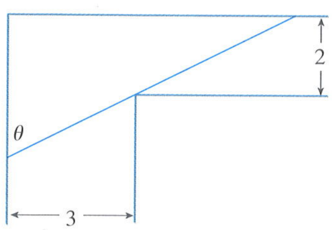
64. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



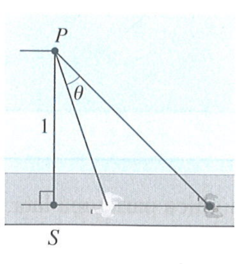
65. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



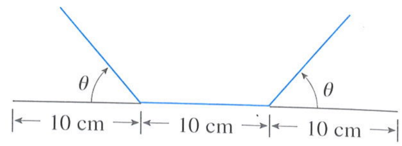
66. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



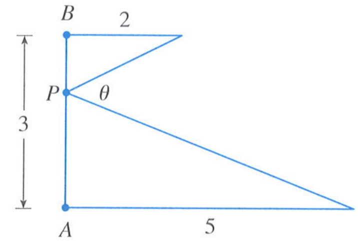
67. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Sugestão*: Maximize tg θ.]



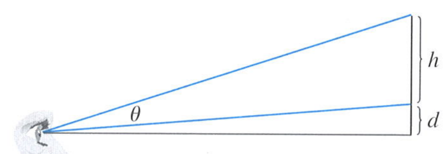
68. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



69. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?



70. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)

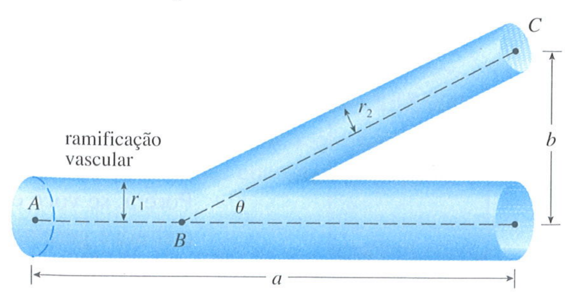


71. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Sugestão*: Expresse a área como função de um ângulo θ.]

72. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei, mas ela também segue da Equação 8.4.2.) A figura mostra o vaso sanguíneo principal com raio r_1 ramificando a um ângulo θ em um vaso menor com raio r_2.



(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é

$$R = C\left(\frac{a - b \operatorname{cotg} \theta}{r_1^4} + \frac{b \operatorname{cossec} \theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

(b) Demonstre que essa resistência é minimizada quando

$$\cos \theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (com precisão de um grau) quando o raio do vaso sanguíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.

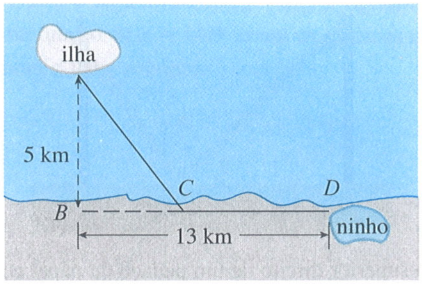
73. Os ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar voos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é necessária mais energia para voar sobre a água que sobre a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e desce sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está 5 km do ponto mais próximo B sobre uma praia reta, voa para um ponto C na praia e então voa ao longo da praia para a área D, seu ninho. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos B e D distam 13 km um do outro.

(a) Em geral, é necessário 1,4 vez mais energia para voar sobre a água que sobre a terra. Para que ponto C o pássaro deve voar a fim de minimizar a energia total despendida ao retornar para seu ninho?

(b) Sejam W e L a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado em termos do voo do pássaro de grandes valores da razão W/L? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão W/L correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

(c) Qual deveria ser o valor de W/L a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho D? Qual deveria ser o valor de W/L para o pássaro voar para B e então seguir ao longo da praia para D?

(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de uma certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de B, quantas vezes mais energia será despendida pelo pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?



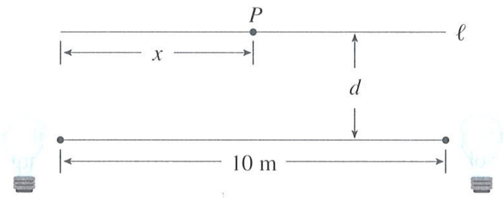
74. Duas fontes de luz de igual potência estão colocadas 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto P sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz a uma distância d metros dela (veja a figura). Queremos localizar P em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto P.

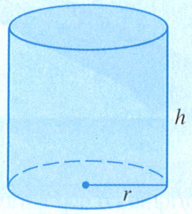
(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando P está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ m mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

(d) Em algum ponto entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de d no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de d por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de d.



PROJETO APLICADO — A FORMA DE UMA LATA



Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como se o volume V de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura h e o raio r que minimizasse o custo do metal para fazer a lata (veja a figura). Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria minimizar a área da superfície do cilindro. Resolvendo esse problema no Exemplo 2 da Seção 4.7, descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você olhar seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se podemos explicar esse fenômeno.

4 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique a diferença entre um máximo absoluto e um máximo local. Ilustre com um esboço.

2. (a) O que diz o Teorema do Valor Extremo?
   (b) Explique o funcionamento do Método do Intervalo Fechado.

3. (a) Enuncie o Teorema de Fermat.
   (b) Defina um número crítico de f.

4. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.
   (b) Enuncie o Teorema do Valor Médio e dê uma interpretação geométrica.

5. (a) Enuncie o Teste Crescente/Decrescente.
   (b) O que significa dizer que f é côncava para cima em I?
   (c) Enuncie o Teste da Concavidade.
   (d) O que são pontos de inflexão? Como são encontrados?

6. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
   (b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada.
   (c) Quais as vantagens e desvantagens relativas desses testes?

7. (a) O que nos diz a Regra de L'Hôspital?
   (b) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver um produto $f(x)g(x)$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (c) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma diferença $f(x) - g(x)$ onde $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (d) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma potência $[f(x)]^{g(x)}$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$?

8. Se você pode usar uma calculadora gráfica ou computador, para que precisa do cálculo para fazer o gráfico da função?

9. (a) Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação $f(x) = 0$, explique geometricamente, com um diagrama, como a segunda aproximação x_2 no método de Newton é obtida.
   (b) Escreva uma expressão para x_2 em termos de x_1, $f(x_1)$ e $f'(x_1)$.
   (c) Escreva uma expressão para x_{n+1} em termos de x_n, $f(x_n)$ e $f'(x_n)$.
   (d) Sob quais circunstâncias o método de Newton provavelmente falhará ou funcionará muito vagarosamente?

10. (a) O que é uma primitiva de uma função f?
    (b) Suponha que F_1 e F_2 sejam ambas primitivas de f em um intervalo I. Como estão relacionadas F_1 e F_2?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo local em c.

2. Se f tiver um valor mínimo absoluto em c, então $f'(c) = 0$.

3. Se f for contínua em (a, b), então f atinge um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em (a, b).

4. Se f for derivável e $f(-1) = f(1)$, então há um número c tal que $|c| < 1$ e $f'(c) = 0$.

5. Se $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, então f é decrescente em $(1, 6)$.

6. Se $f''(2) = 0$, então $(2, f(2))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$.

7. Se $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

8. Existe uma função f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e $f'(x) > 1$ para todo x.

9. Existe uma função f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.

10. Existe uma função f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.

11. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f + g$ é crescente em I.

12. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f - g$ é crescente em I.

13. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então fg é crescente em I.

14. Se f e g forem funções crescentes positivas em um intervalo I, então fg é crescente em I.

15. Se f for crescente e $f(x) > 0$ em I, então $g(x) = 1/f(x)$ é decrescente em I.

16. Se f for par, então f' será par.

17. Se f for periódica, então f' será periódica.

18. A primitiva mais geral de $f(x) = x^{-2}$ é
$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Se $f'(x)$ existe e não é nula para nenhum x, então $f(1) \neq f(0)$.

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x} = 1$

EXERCÍCIOS

1–6 Encontre os valores extremos absolutos e locais da função no intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}, [-2, 2]$

4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

6. $f(x) = (\ln x)/x^2, \quad [1, 3]$

7–14 Calcule o limite.

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{\ln(1 + x)}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$

12. $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

13. $\lim_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

14. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

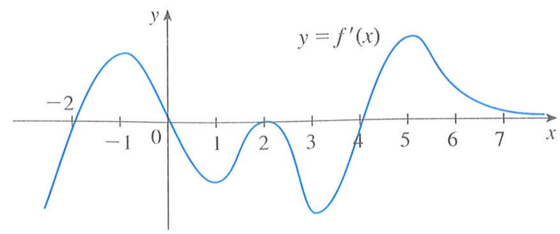
15–17 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça as condições dadas.

15. $f(0) = 0, \;\; f'(2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \;\; \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty,$
$f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2), (1, 6)$, e $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ em $(2, 1)$ e $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ em $(0, 6)$ e $(6, 12)$

16. $f(0) = 0$, f é contínua e par,
$f'(x) = 2x$ se $0 < x < 1$, $f'(x) = -1$ se $1 < x < 3$,
$f'(x) = 1$ se $x > 3$

17. f é ímpar, $f'(x) = 0$ para $0 < x < 2$,
$f'(x) > 0$ para $x > 2$, $f''(x) > 0$ para $0 < x < 3$,
$f''(x) < 0$ para $x > 3$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

18. A figura mostra o gráfico da *derivada* f' de uma função f.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Esboce o gráfico de f''.
(d) Esboce um possível gráfico de f.



19–34 Use o roteiro da Seção 4.5 para esboçar a curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x$

30. $y = 4x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = xe^{-2x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Faça os gráficos de f que revelem todos os aspectos da curva. Use os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e de decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão. No Exercício 35, use o cálculo para achar exatamente essas quantidades.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6{,}5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

39. Faça o gráfico de $f(x) = e^{-1/x^2}$ em uma janela retangular que mostre todos os principais aspectos dessa função. Estime os pontos de inflexão. A seguir, use o cálculo para achá-los exatamente.

SCA **40.** (a) Faça o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique a forma do gráfico calculando os limites de $f(x)$ quando x tende a $\infty, -\infty, 0^+$ e 0^-.
(c) Use o gráfico de f para estimar as coordenadas dos pontos de inflexão.

(d) Use seu SCA para calcular e fazer o gráfico de f.

(e) Use o gráfico da parte (d) para estimar mais precisamente o ponto de inflexão.

SCA **41–42** Use os gráficos de f, f' e f'' para estimar a coordenada x dos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = e^{-0{,}1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue a família de funções $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. Que aspectos os membros dessa família têm em comum? Como eles diferem? Para quais valores de C a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$? Para quais valores de C a função f não tem gráfico? O que acontece quando $C \to \infty$?

44. Investigue a família de funções $f(x) = cxe^{-cx^2}$. O que acontece com os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão quando c varia? Ilustre suas conclusões fazendo o gráfico de vários membros da família.

45. Mostre que a equação $3x + 2\cos x + 5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

46. Suponha que f seja contínua em $[0, 4]$, $f(0) = 1$ e $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x em $(0, 4)$. Mostre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^{1/5}$ no intervalo $[32, 33]$, mostre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2{,}0125$$

48. Para que valores das constantes a e b, $(1, 6)$ é um ponto de inflexão da curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

49. Seja $g(x) = f(x^2)$, onde f é duas vezes derivável para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.

(a) Em que números g tem um valor extremo?

(b) Discuta a concavidade de g.

50. Encontre dois inteiros positivos tal que a soma do primeiro número com quatro vezes o segundo número é 1 000, e o produto dos números é o maior possível.

51. Mostre que a menor distância do ponto (x_1, y_1) a uma reta $Ax + By + C = 0$ é

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encontre o ponto sobre a hipérbole $xy = 8$ que está mais próximo ao ponto $(3, 0)$.

53. Encontre a menor área possível de um triângulo isósceles que está circunscrito em um círculo de raio r.

54. Encontre o volume do maior cone circular que pode ser inscrito em uma esfera de raio r.

55. No ΔABC, D está em AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm e $|CD| = 5$ cm. Onde estaria o ponto P escolhido em CD para a soma $|PA| + |PB| + |PC|$ ser mínima?

56. Faça o Exercício 55 quando $|CD| = 2$ cm.

57. A velocidade de uma onda de comprimento L em água profunda é

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

onde K e C são constantes positivas conhecidas. Qual é o comprimento da onda que dá a velocidade mínima?

58. Um tanque de armazenamento de metal com volume V deve ser construído com a forma de um cilindro circular reto com um hemisfério em cima. Quais as dimensões que vão exigir a menor quantidade de metal?

59. Uma arena de esportes tem capacidade para 15 mil espectadores sentados. Com o preço do bilhete a \$ 12, a frequência média em um jogo é de 11 mil espectadores. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada dólar de redução no preço do bilhete, a média da frequência aumenta em 1 000. Como deve ser estabelecido o preço do bilhete para maximizar o rendimento da venda de entradas?

60. Um fabricante determinou que o custo de fazer x unidades de uma mercadoria é $C(x) = 1\,800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$ e a função demanda é $p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x$.

(a) Faça o gráfico das funções custo e receita e use os gráficos para estimar o nível de produção para o lucro máximo.

(b) Use o cálculo para achar o nível de produção para o lucro máximo.

(c) Estime o nível de produção que minimize o custo médio.

61. Use o método de Newton para achar a raiz da equação $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ com precisão de seis casas decimais.

62. Use o método de Newton para achar todas as raízes da equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ com precisão de seis casas decimais.

63. Use o método de Newton para achar o máximo absoluto da função $f(t) = \cos t + t - t^2$ com precisão de oito casas decimais.

64. Use o roteiro na Seção 4.5 para esboçar o gráfico da curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Use o método de Newton quando for necessário.

65–72 Encontre f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \operatorname{tg} x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2\cosh x, \qquad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3\operatorname{sen} t, \qquad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \qquad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \qquad f(0) = 2, \ f(1) = 0$

73–74 Uma partícula se move conforme os seguintes dados. Encontre a posição da partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \qquad s(0) = 1$

74. $a(t) = \text{sen}\, t + 3 \cos t, \qquad s(0) = 0, v(0) = 2$

75. (a) Se $f(x) = 0{,}1e^x + \text{sen}\, x$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, use um gráfico de f para esboçar um gráfico da primitiva F de f que satisfaça $F(0) = 0$.

(b) Encontre uma expressão para $F(x)$.

(c) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (b). Compare com seu esboço da parte (a).

76. Investigue a família de curvas dada por

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

Em particular, você deve determinar o valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos varia e o valor de transição no qual o número de pontos de inflexão varia. Ilustre as várias possíveis formas com gráficos.

77. Uma caixa é lançada de um helicóptero a 500 m acima do chão. Seu paraquedas não abre, mas ela foi planejada para suportar uma velocidade de impacto de 100 m/s. Ela suportará o impacto ou não?

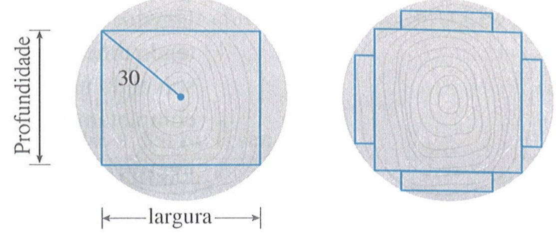
78. Em uma corrida automobilística ao longo de uma estrada reta, o carro A passou o carro B duas vezes. Demonstre que em algum instante durante a corrida suas acelerações eram iguais. Diga quais as suas hipóteses.

79. Uma viga retangular será cortada de uma tora de madeira com raio de 30 cm.

(a) Mostre que a viga com área da seção transversal máxima é quadrada.

(b) Quatro pranchas retangulares serão cortadas de cada uma das quatro seções da tora que restarão após o corte da viga quadrada. Determine as dimensões das pranchas que terão área da seção transversal máxima.

(c) Suponha que a resistência de uma viga retangular seja proporcional ao produto de sua largura e o quadrado de sua profundidade. Encontre as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de uma tora cilíndrica.



80. Se um projétil for disparado com uma velocidade inicial v em um ângulo de inclinação θ a partir da horizontal, então sua trajetória, desprezando a resistência do ar, é uma parábola

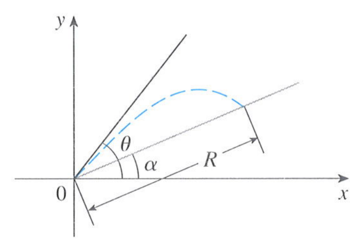
$$y = (\text{tg}\, \theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponha que o projétil seja disparado da base de um plano que está inclinado de um ângulo α, $\alpha > 0$, a partir da horizontal, como mostrado na figura. Mostre que o alcance do projétil, medido no plano inclinado, é dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos^2\theta\, \text{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ tal que R seja máximo.

(c) Suponha que o plano esteja em um ângulo α *abaixo* da horizontal. Determine o alcance R e o ângulo segundo o qual o projétil deve ser disparado para maximizar R.



81. Mostre que para $x > 0$, temos

$$\frac{x}{1 + x^2} < \text{tg}^{-1}\, x < x$$

82. Esboce o gráfico de uma função f tal que $f'(x) < 0$ para todo x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

Um dos mais importantes princípios de resolução de problemas é a *analogia*. Se você está tendo dificuldades em começar a lidar com um problema, é algumas vezes útil começar resolvendo um similar, porém mais simples. O problema a seguir ilustra o princípio. Cubra completamente a solução e tente resolvê-lo primeiro, você mesmo.

EXEMPLO Se x, y e z forem números positivos, demonstre que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUÇÃO O começo deste problema pode ser difícil. (Muitos estudantes o atacaram efetuando a multiplicação no numerador, mas isso somente cria uma confusão.) Vamos tentar pensar em um problema mais simples e parecido. Quando diversas variáveis estão envolvidas, é frequentemente útil pensar em um problema análogo com menos variáveis. No caso presente podemos reduzir o número de variáveis de três para um e demonstrar a desigualdade análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De fato, se formos capazes de demonstrar (1), então segue a desigualdade desejada, pois

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

A chave para demonstrar (1) está em reconhecer que é uma versão disfarçada de um problema de mínimo. Se fizermos

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

então $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de modo que $f'(x) = 0$ quando $x = 1$. Também, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Consequentemente, o valor mínimo absoluto de f é $f(1) = 2$. Isso significa que

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos os valores de } x$$

e, como anteriormente mencionado, a desigualdade dada segue pela multiplicação.

A desigualdade em (1) pode também ser demonstrada sem cálculo. De fato, se $x > 0$, temos

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff x^2-2x+1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0 \qquad \square$$

Como a última desigualdade é obviamente verdadeira, a primeira também o é.

Relembre
O que você aprendeu da solução desse exemplo?
- Para resolver um problema envolvendo diversas variáveis, pode ser útil resolver um problema análogo com somente uma variável.
- Quando tentar demonstrar uma desigualdade, pode ajudar pensá-la como um problema de máximo ou de mínimo.

PROBLEMAS

1. Se um retângulo tiver sua base no eixo x e dois vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$, mostre que o retângulo tem a maior área possível quando os dois vértices estiverem nos pontos de inflexão da curva.

2. Mostre que $|\text{sen } x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.

3. Mostre que, para todos os valores positivos de x e y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Mostre que, $x^2 y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leq 16$ para todos os valores positivos de x e y, tais que $|x| \leq 2$ e $|y| \leq 2$.

5. Se a, b, c, e d forem constantes tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

encontre o valor da soma $a + b + c + d$.

6. Encontre o ponto sobre a parábola $y = 1 - x^2$ no qual a reta tangente corta do primeiro quadrante o triângulo com a menor área.

7. Encontre o ponto mais alto e o mais baixo sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. Esboce o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $|x + y| \leq e^x$.

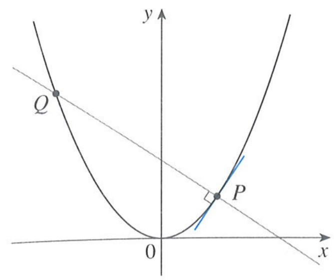


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

9. Se $P(a, a^2)$ for qualquer ponto na parábola $y = x^2$, exceto a origem, seja Q o ponto em que a reta normal intercepta a parábola novamente. Mostre que o segmento de reta PQ tem o comprimento mais curto possível quando $a = 1/\sqrt{2}$.

10. Para quais valores de c a curva $y = cx^3 + e^x$ tem pontos de inflexão?

11. Determine os valores do número a para os quais a função f não tem ponto crítico:

$$f(x) = (a^2 + a - 6) \cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tais que

$$2xy \leq |x - y| \leq x^2 + y^2$$

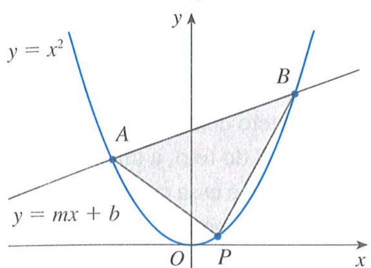


FIGURA PARA O PROBLEMA 13

13. A reta $y = mx + b$ intercepta a parábola $y = x^2$ nos pontos A e B (veja a figura). Encontre o ponto P sobre o arco AOB da parábola que maximize a área do triângulo PAB.

14. $ABCD$ é um pedaço de papel quadrado com lados de comprimento 1 m. Um quarto de círculo é traçado de B a D com centro em A. O pedaço de papel é dobrado ao longo de EF, com E em AB e F em AD, de tal forma que A caia sobre o quarto de círculo. Determine a área máxima e a mínima que o triângulo AEF pode ter.

15. Para quais números positivos a a curva $y = a^x$ intercepta a reta $y = x$?

16. Para que valores de a é verdade que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

17. Seja $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, an$ são números reais e n é um inteiro positivo. Se for dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para todo x, mostre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

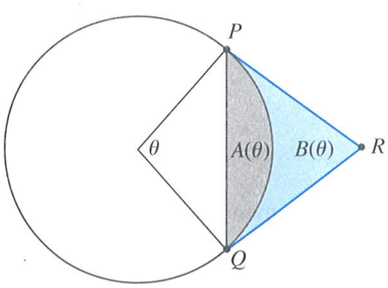


FIGURA PARA O PROBLEMA 18

18. Um arco de círculo PQ subtende um ângulo central θ como na figura. Seja $A(\theta)$ a área entre a corda PQ e o arco PQ. Seja $B(\theta)$ a área entre as retas tangentes PR, QR e o arco. Encontre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

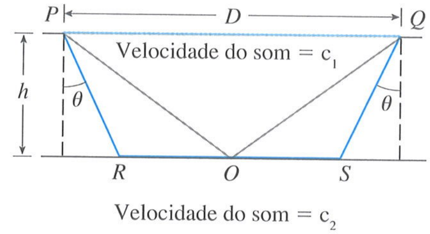
19. As velocidades do som c_1 em uma camada superior e c_2 em uma camada inferior de rocha e a espessura h da camada superior podem ser determinadas pela exploração sísmica se a velocidade do som na camada inferior for maior que a velocidade do som na camada superior. Uma carga de dinamite é detonada em um ponto P e os sinais transmitidos são registrados em um ponto Q, o qual está a uma distância D de P. O primeiro sinal leva T_1 segundos para chegar ao ponto Q pela superfície. O próximo

sinal viaja do ponto P ao ponto R, do ponto R para o ponto S na camada inferior e daí para o ponto Q e leva T_2 segundos para fazer este percurso todo. O terceiro sinal é refletido na camada inferior no ponto médio de RS e leva T_3 segundos para chegar em Q.

(a) Escreva T_1, T_2 e T_3 em termos de D, h, c_1, c_2 e θ.

(b) Mostre que T_2 assume o seu valor mínimo em sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponha que $D = 1$ km, $T_1 = 0{,}26$ s, $T_2 = 0{,}32$ s, $T_3 = 0{,}34$ s. Ache c_1, c_2 e h.



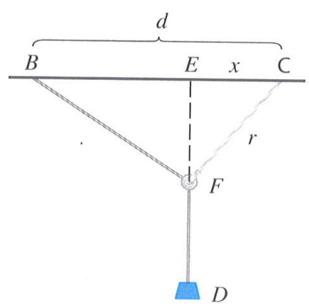
Observação: os geofísicos usam essa técnica para estudar a estrutura da crosta terrestre, quando fazem prospecção de petróleo ou examinam falhas na estrutura do terreno.

20. Para quais valores de c existe uma reta que intercepta a curva $y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$ em quatro pontos distintos?

21. Um dos problemas propostos pelo marquês de L'Hôspital em seu livro *Analyse des Infiniment Petits* diz respeito a uma polia que está presa ao teto de um cômodo em um ponto C por uma corda de comprimento r. Em outro ponto B do teto, a uma distância d de C (onde $d > r$), uma corda de comprimento ℓ é amarrada e essa corda passa pela polia em um ponto F e temos presa a ela um peso W. O peso é liberado e chega ao seu ponto de equilíbrio na posição D. L'Hôspital argumentou que esse equilíbrio ocorre quando $|ED|$ é maximizado. Mostre que quando o sistema alcança o equilíbrio, o valor de x é

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que essa expressão independe de W e ℓ.



22. Dada a uma esfera de raio r, ache a altura da pirâmide de menor volume cuja base é um quadrado e cujas base e faces triangulares são todas tangentes à esfera. E, se a base da pirâmide fosse um polígono com n lados e ângulos iguais? (Use o fato de que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}Ah$, em que A é a área da base.)

23. Suponha que uma bola de neve derrete de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional a área de sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume original, quanto demorará para a bola de neve derreter completamente?

24. Uma bolha hemisférica é colocada sobre uma bolha esférica de raio 1. Uma bolha hemisférica menor é então colocada sobre a primeira bolha. O processo continua até que sejam formados n compartimentos, incluindo a esfera. (A figura mostra o caso para $n = 4$.) Use a indução matemática para demonstrar que a altura máxima de qualquer torre de bolhas com n compartimentos é dada pela expressão $1 + \sqrt{n}$.