MAT 0146 - Cálculo 1 para Economia

1^a Prova - 4 de abril de 2016

Questão 1) (2 pts) Calcule os limites:

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}) \qquad\qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$$

Solução: Para todo $x>0$, temos:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} =$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$$

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, vem:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}$$

(b) Para todo $x\neq 0$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\cdot x$$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

(o que se vê fazendo $y=x^2$ no primeiro limite), vem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}x = 1\cdot 0 = 0$$

Questão 2) (2 pts) Derive:

$$\text{(a)}\ f(x) = x\cdot[\operatorname{sen}(x^2)]^{10},\quad x\in\mathbb{R}. \qquad\qquad \text{(b)}\ g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2},\quad x\neq 0.$$

Solução: (a) Aplicando a regra do produto e, em seguida, aplicando duas vezes a regra da cadeia, vem:

$$f'(x) = [\operatorname{sen}(x^2)]^{10} + x\cdot 10\cdot[\operatorname{sen}(x^2)]^9\cdot[\cos(x^2)]\cdot 2x = [\operatorname{sen}(x^2)]^{10} + 20x^2\cdot[\operatorname{sen}(x^2)]^9\cdot[\cos(x^2)]$$

(b) Aplicando a regra do quociente e, para derivar o numerador, a regra da cadeia, vem:

$$g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2 - e^{-\frac{1}{x}}\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2x}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Questão 3) (3 pts) (a) Determine os valores das constantes a e b que fazem com que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , \text{ se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja derivável em $x = 1$.

(b) Com os valores de a e b encontrados no item (a), determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$

(c) Faça uma figura em que constem o gráfico de f e a reta tangente encontrada no item (b).

SOLUÇÃO: (a) Sejam $g(x) = ax^2 + b$ e $h(x) = x^2 - 5x + 6$. A função f será derivável em $x = 1$ se, e somente se, $g(1) = h(1)$ e $g'(1) = h'(1)$. Como $g'(x) = 2ax$ e $h'(x) = 2x - 5$, vemos que isto é equivalente a a e b satisfazerem o sistema $\begin{cases} a + b &= 2 \\ 2a &= -3 \end{cases}$, ou seja $a = -\dfrac{3}{2}$ e $b = \dfrac{7}{2}$.

(b) Como $f'(1) = h'(1) = -3$ e $f(1) = h(1) = 2$, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1)) = (1, 2)$ é $y - 2 = -3(x - 1)$, ou $y + 3x = 5$.

Questão 4) (3 pts) Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$.

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que f é derivável em $x = 0$, determinando o valor de $f'(0)$.

(c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(d) Mostre que f' é contínua em $x = 0$.

SOLUÇÃO: (b) Para todo $x \neq 0$, temos:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - 0}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1}.$$

Daí:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Segue da definição de derivada que f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(a) Sendo derivável em $x = 0$, necessariamente f é também contínua nesse ponto. Este argumento é suficiente para mostrar o que se pede. Pode-se também mostrar diretamente que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ (é esta a definição de continuidade de f no ponto $x = 0$):

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 0 = f(0)$$

(c) Aplicando a regra do quociente, junto com a regra da cadeia para derivar o numerador, temos:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x - (\sqrt{x^2+1} - 1)}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1) + \sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2\sqrt{x^2+1}}, \text{ se } x \neq 0.$$

(d) Multiplicando por $\sqrt{x^2+1} + 1$ o numerador e o denominador da expressão encontrada para $f'(x)$, vem:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} = f'(0),$$

ou seja, f' é contínua em $x = 0$.